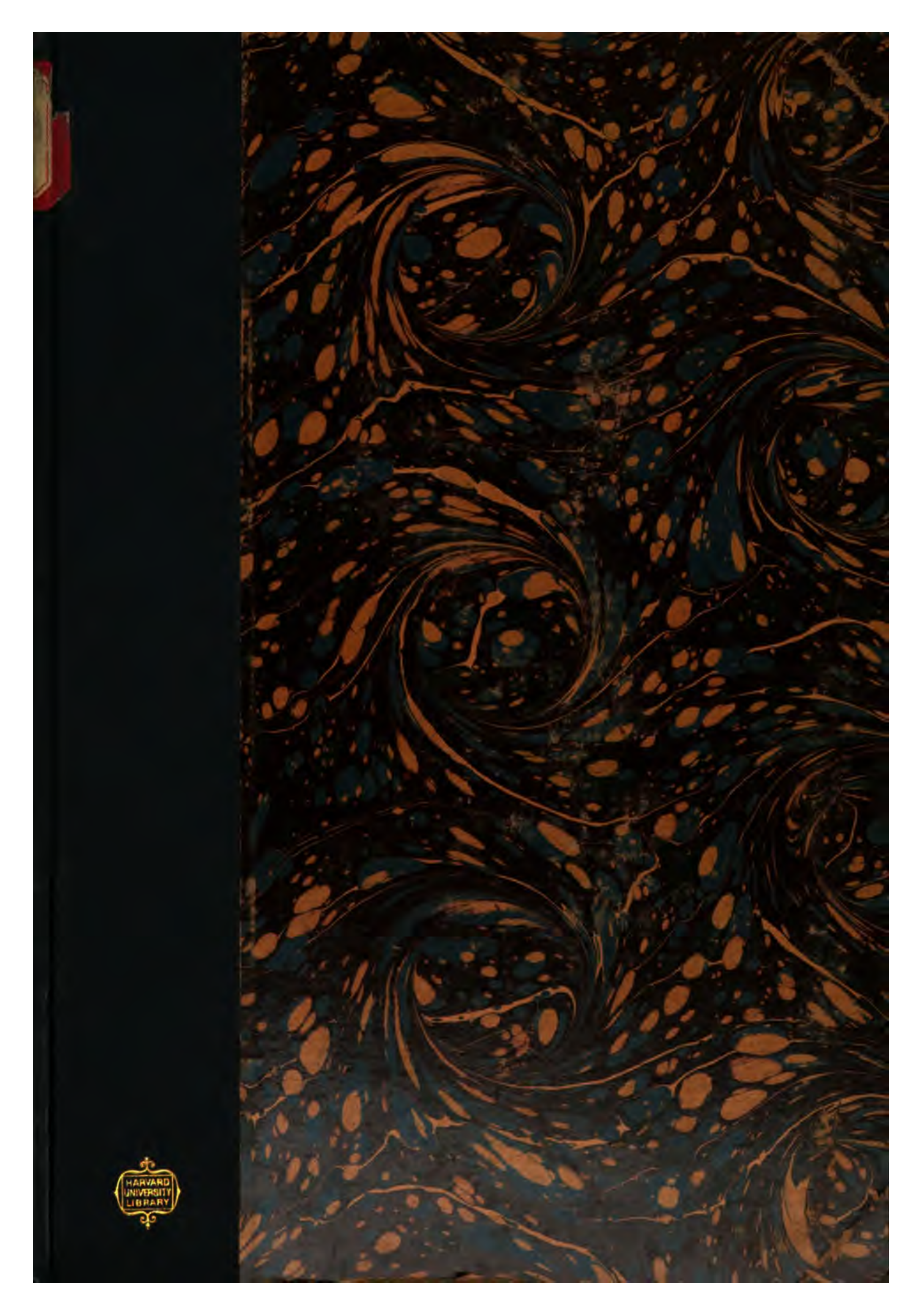



HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY





Über die Zusammensetzung

der

endlichen continuierlichen Transformationsgruppen,

insbesondre

der Gruppen vom Range Null.

Inaugural-Dissertation

zur

Erwerbung der Doktorwürde

der

philosophischen Fakultät der Universität Leipzig

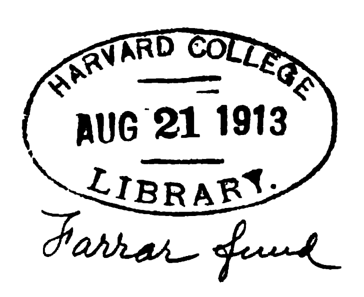
vorgelegt von

Karl Arthur Umlauf.

Leipzig

Druck von Breitkopf & Härtel

1891.


HARVARD COLLEGE
AUG 21 1913
LIBRARY.
Farrar fund

Die vorliegende Arbeit giebt einen Beitrag zu der Theorie der *continuierlichen Transformationsgruppen*, die von Sophus Lie begründet und in seinem 1888 erschienenen Werke [1]) niedergelegt worden ist.

Ein spezielleres Problem aus dieser Theorie, die *Zusammensetzung der endlichen continuierlichen Transformationsgruppen*, hat in jüngster Zeit Prof. Killing [2]) in Braunsberg von einem wesentlich neuen Gesichtspunkte aus in Angriff genommen, indem er den Begriff des »*Ranges*« einer Gruppe einführt und die Gruppen nach ihrem Range klassifiziert.

An den ersten Teil der Killing'schen Untersuchungen schliesst sich die vorliegende Arbeit an, um dann insbesondre die Zusammensetzung der Gruppen vom »*Range Null*« zu behandeln. Nachdem einleitungsweise einige Sätze über die adjungierte Gruppe nach Lie, Theorie der Transformationsgruppen I, Kap. 16 wiederholt sind, werden in einem ersten Abschnitte die wichtigsten Ergebnisse der Killing-schen Untersuchungen, soweit sie für die späteren Betrachtungen grundlegend sind, wieder abgeleitet, wodurch ich zum leichteren Verständnis der Killing'schen Abhandlungen beizutragen hoffe. Dabei sind die Vorträge massgebend gewesen, die Herr Prof. Engel im Kgl. mathematischen Seminar über die Killing'schen Untersuchungen gehalten hat.

In einem zweiten Abschnitte gehe ich auf die Zusammensetzung der Gruppen vom Range Null näher ein; nach Ableitung allgemeiner

1) Sophus Lie, Theorie der Transformationsgruppen. Erster Abschnitt, unter Mitwirkung von Dr. F. Engel bearbeitet. Leipzig, Teubner 1888. Zweiter Abschnitt, 1890.

2) Die Zusammensetzung der stetigen, endlichen Transformationsgruppen. Von Wilhelm Killing in Braunsberg, Ostpr. Erster Teil. Math. Annalen, Bd. 31, 1888, S. 252 ff. Zweiter Teil. Math. Annal. Bd. 33, 1889, S. 1 ff. Dritter Teil. Math. Annal. Bd. 35, 1889, S. 57 ff.

Sätze wird die Bestimmung aller Typen von Zusammensetzungen der zwei- bis sechsgliedrigen Gruppen vom Range Null gegeben, schliesslich wird die Bestimmung der Zusammensetzungen der Gruppen vom Range Null für einen besonderen Fall noch bis zu den Gruppen mit 9 Parametern durchgeführt.

Es sei auch an dieser Stelle ausgesprochen, dass ich mich den Herren Prof. Sophus Lie und F. Engel zu grösstem Danke verpflichtet fühle für die mannigfache Anregung, die sie mir jederzeit bei meinen Studien gewährt haben. Die Einführung in die Theorie der Transformationsgruppen verdanke ich den Vorlesungen und Seminaren, sowie vielfacher persönlicher Anregung des Herrn Prof. Lie; Prof. Engel vermittelte mir die Kenntnis der Killing'schen Untersuchungen, veranlasste mich zu der gegenwärtigen Arbeit und ermöglichte mir die Durchführung derselben durch mannigfache Unterstützung, für die ich ihm besonderen Dank schulde. Die von Herrn Prof. Engel herrührenden Sätze und Gesichtspunkte sind im Texte als solche gekennzeichnet worden.

Das im Folgenden oft citierte, oben erwähnte Werk von Lie ist zur Abkürzung vielfach nur durch »Lie, Trfgr. I« bezeichnet worden, die Killing'schen Abhandlungen meist durch »Killing, Z. v. Gr. I (II)«.

Alle sonstigen ohne Beweis angewendeten allgemeinen Sätze aus der Theorie der Transformationsgruppen gründen sich auf das Liesche Werk.

I. Abschnitt.

Über die charakteristische Gleichung einer Gruppe.

§ 1.

Die adjungierte Gruppe. Begriff der ersten derivierten Gruppe (Hauptuntergruppe).

Es seien $X_1 f, \cdots X_r f$ r unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe; dann bestehen Relationen der Form:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}^s c_{iks} X_s f$$

und es bezeichnet der Ausdruck

$$\sum_1^r {}^i e_i X_i f,$$

wo $e_1 \dots e_r$ willkürliche Constanten, die allgemeine infinitesimale Transformation der Gruppe. Führt man auf diese allgemeine infinitesimale Transformation irgend eine infinitesimale Transformation $X_k f$ der Gruppe aus, so geht $\sum_1^r {}^i e_i X_i f$ über in

$$\sum_1^r {}^i e_i X_i f + (\sum_1^r {}^i e_i X_i f, \ X_k f)\, \delta t$$

oder

$$\sum_1^r {}^i e_i X_i f + \sum_1^r {}^i e_i \sum_1^r {}^s c_{iks} X_s f \cdot \delta t\,,$$

wofür wir mit Vertauschung der Indices i und s in der letzten Summe auch schreiben können

$$\sum_1^r {}^i (e_i + \delta t \sum_1^r {}^s c_{ski} e_s)\, X_i f.$$

Diese neue infinitesimale Transformation ist der ursprünglichen benachbart und gehört ebenfalls der Gruppe an[1]), hat also die Form

$$\sum_1^r {}^i e_i' X_i f ,$$

wo

$$e_i' = e_i + \delta t \sum_1^r {}^s c_{ski} e_s , \quad i = 1 \cdots r .$$

Bei Ausführung aller Transformationen der r-gliedrigen Gruppe auf die allgemeine infinitesimale Transformation $\sum_1^r {}^i e_i X_i f$ werden sonach die Coefficienten $e_1 \dots e_r$ durch eine Schar von linearen homogenen Transformationen in neue Constanten $e_1' \dots e_r'$, $e_1'' \dots e_r''$, $e_1''' \dots e_r'''$, ... übergeführt; bezeichnen wir die infinitesimalen Transformationen dieser Schar symbolisch durch

$$E_k f \equiv \sum_{si}^{1 \dots r} c_{ski} e_s \frac{\partial f}{\partial e_i} , \quad k = 1 \cdots r ,$$

so zeigt eine einfache Rechnung[2]), dass die $E_k f$ paarweise in den Beziehungen stehen

$$(E_i E_k) = \sum_1^r {}^\nu c_{ik\nu} E_\nu f ,$$

die $E_k f$ erzeugen also eine lineare homogene Gruppe, die *adjungierte Gruppe*[3]) der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \dots X_r f$; es gilt dann der wichtige Satz:

Satz I. *Die adjungierte Gruppe der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ ist isomorph mit der Gruppe $X_1 f \dots X_r f$, d. h. bestehen zwischen den $X_1 f \dots X_r f$ Relationen von der Form*

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}^s c_{iks} X_s f$$

und sind

$$E_k f \equiv \sum_{si}^{1 \dots r} c_{ski} e_s \frac{\partial f}{\partial e_i} , \quad k = 1 \cdots r$$

r infinitesimale Transformationen der adjungierten Gruppe, so bestehen zwischen $E_1 f \dots E_r f$ Relationen von der Form

$$(E_i E_k) = \sum_1^r {}^s c_{iks} E_s f .$$

1) Vgl. Lie, Transformationsgruppen I, S. 81.
2) Lie, a. a. O. S. 274.
3) Lie, a. a. O. S. 272.

Sind die $E_1 f \ldots E_r f$ nicht alle unabhängig von einander, dann besteht wenigstens eine Relation

$$\sum_1^r{}^k \lambda_k E_k f \equiv \sum_1^r{}^k \lambda_k \sum_{si}^{1\ldots r} c_{ski} e_s \frac{\partial f}{\partial e_i} \equiv 0 \; .$$

Diese Identität fordert, dass

$$\sum_{ks}^{1\ldots r} \lambda_k c_{ski} \equiv 0 \qquad i = 1 \cdots r \; ;$$

dann bestehen aber auch die Identitäten

$$(X_s \,, \sum_1^r{}^k \lambda_k X_k f) \equiv \sum_1^r{}^k \sum_1^r{}^i \lambda_k c_{ski} X_i f \equiv 0 \,, \quad s = 1 \cdots r \,,$$

d. h. die infinitesimale Transformation $\sum_1^r{}^k \lambda_k X_k f$ ist mit allen Transformationen der Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ vertauschbar, ist eine *ausgezeichnete*[1]) *infinitesimale Transformation* der Gruppe. Offenbar entspricht jeder ausgezeichneten infinitesimalen Transformation der Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ eine lineare Relation zwischen $E_1 f \ldots E_r f$; enthält demnach die Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ gerade m unabhängige ausgezeichnete infinitesimale Transformationen, so sind unter den $E_1 f \ldots E_r f$ gerade $r - m$ unabhängige infinitesimale Transformationen, die adjungierte Gruppe ist also $(r - m)$-gliedrig[2]).

Deuten wir $e_1 \ldots e_r$ als homogene Punktcoordinaten eines $(r - 1)$-fach ausgedehnten Raumes R_{r-1}, dann werden die ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ dargestellt durch die ∞^{r-1} Punkte des Raumes R_{r-1}; dieselben werden durch die adjungierte Gruppe unter einander vertauscht. Jede invariante $(r - m)$gliedrige Untergruppe der r-gliedrigen Gruppe ist dann begrifflich zu deuten als eine $(r - m - 1)$fach ausgedehnte, ebene Mannigfaltigkeit M_{r-m-1} des Raumes R_{r-1}, welche bei allen Transformationen der adjungierten Gruppe invariant bleibt. Diese Bemerkungen werden uns späterhin von Nutzen sein.

Es genügt für die weiteren Untersuchungen, hiermit der wichtigsten Sätze über die adjungierte Gruppe Erwähnung gethan zu haben; wir wenden uns jetzt dem Begriffe der »*ersten derivierten Gruppe*« zu.

Sind r unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1 f \ldots X_r f$ gegeben, die eine r-gliedrige Gruppe erzeugen, dann bestimmen die Ausdrücke

$$(X_i X_k) = \sum_1^r{}^s c_{iks} X_s f$$

1) Lie, Trfgr. I, S. 276.

2) Lie, Trfgr. I, S. 277, Theorem 49.

ebenfalls eine Anzahl von infinitesimalen Transformationen, und da

$$((X_i X_k)\ ,\ \ (X_\mu X_\nu)) = \left(\sum_1^r{}^s c_{iks} X_s f\ ,\ \ \sum_1^r{}^\tau c_{\mu\nu\tau} X_\tau f\right)$$

$$= \overline{\sum^s \sum^\tau}_1^r c_{iks} c_{\mu\nu\tau} (X_s X_\tau)$$

ist, so erzeugen die infinitesimalen Transformationen $(X_i X_k)$ ebenfalls eine Gruppe.

Führen wir auf irgend eine infinitesimale Transformation $(X_i X_k)$ dieser Gruppe eine beliebige infinitesimale Transformation $X_\mu f$ der r-gliedrigen Gruppe aus, so ergiebt sich

$$(X_\mu f\ ,\ \ (X_i X_k)) = (X_\mu f\ ,\ \sum_1^r{}^s c_{iks} X_s f) = \sum_1^r{}^s c_{iks} (X_\mu X_s)\ .$$

Die von den $(X_i X_k)$ erzeugte Gruppe bleibt sonach bei allen infinitesimalen Transformationen und also auch bei allen endlichen Transformationen der r-gliedrigen Gruppe invariant. Offenbar können unter den $\frac{r(r-1)}{2}$ Transformationen $(X_i X_k)$ höchstens r von einander unabhängige enthalten sein; enthält die Gruppe der $(X_i X_k)$ gerade r unabhängige infinitesimale Transformationen, so ist sie mit der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ identisch; enthält sie weniger als r unabhängige infinitesimale Transformationen, so bildet sie eine *invariante Untergruppe* der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \dots X_r f$. Lie[1]) giebt dieser von den infinitesimalen Transformationen $(X_i X_k)$ erzeugten Gruppe den Namen »*erste derivierte Gruppe*« zum Unterschiede von den durch Wiederholung der Klammeroperation aus der Gruppe der $(X_i X_k)$ hervorgehenden 2., 3., ... derivierten Gruppen. Killing[2]) wählt statt dessen die Bezeichnung *Hauptuntergruppe*, da diese Gruppe verschiedene hervorragende Eigenschaften besitzt. Da eine gemeinsame Bezeichnung der durch k-malige Wiederholung der Klammeroperation aus der Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ hervorgehenden Gruppen nötig ist, so dürfte die Lie'sche Bezeichnungsweise vorzuziehen sein.

Ein Beispiel dafür, dass eine Gruppe mit ihrer 1. derivierten Gruppe identisch ist, bietet die allgemeine projektive Gruppe der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit

$$\frac{\partial f}{\partial x}\ ,\quad x\frac{\partial f}{\partial x}\ ,\quad x^2\frac{\partial f}{\partial x}\ ,$$

denn sie besitzt die Zusammensetzung

1) Vgl. Lie, Leipz. Berichte 1888, S. 19.

2) Killing, Z. v. Gr. I. Math. Annal. Bd. XXXI, 1888, S. 254.

$$(X_1 X_2) = X_1 \qquad (X_1 X_3) = 2 X_2 \qquad (X_2 X_3) = X_3 \ .$$

Insbesondere ist die 1. derivierte Gruppe einer 2-gliedrigen Gruppe, deren Transformationen nicht vertauschbar sind, stets eingliedrig, denn wenn

$$(X_1 X_2) = \alpha X_1 + \beta X_2 \ ,$$

wo α und β nicht beide Null sind, so können wir die infinitesimalen Transformationen der Gruppe stets so wählen, dass

$$(X_1 X_2) = X_1$$

wird.

§ 2.

Die charakteristische Gleichung. Einteilung der Gruppen nach ihrem Range[1]).

Nach den einleitenden Bemerkungen des vorangehenden Paragraphen gelangen wir nunmehr zu dem Probleme, von welchem die Untersuchungen Killing's über die Zusammensetzung von Gruppen ihren Ausgang nehmen.

Wir stellen uns die Aufgabe, alle diejenigen 2-gliedrigen Untergruppen der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ zu bestimmen, in denen eine gegebene infinitesimale Transformation $\sum_1^r {}^i \, e_i X_i f$ enthalten ist.

Beschränken wir uns zunächst auf solche 2-gliedrige Untergruppen, in denen $\sum_1^r {}^i \, e_i X_i f$ nicht die erste derivierte Gruppe ist, so kommt unsre Aufgabe auf die folgende hinaus: alle infinitesimalen Transformationen $\sum_1^r {}^k \, \lambda_k X_k f$ zu bestimmen, für welche die Gleichung besteht

$$(1) \qquad \left(\sum_1^r {}^i \, e_i X_i f \ , \ \sum_1^r {}^k \, \lambda_k X_k f \right) = \omega \sum_1^r {}^k \, \lambda_k X_k f \ .$$

Diese Gleichung giebt für $\omega = 0$ auch alle 2-gliedrigen Untergruppen, deren Transformationen vertauschbar sind.

Stehen die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1 f \ldots X_r f$ der r-gliedrigen Gruppe in den Beziehungen

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}^s \, c_{iks} X_s f \ ,$$

so folgt aus (1) die Gleichung

---

1) Killing, Z. v. Gr. I. Math. Ann. Bd. XXXI, 1888, §§ 3 u. 4.

$$\overline{\sum^i\sum^k}_1^r e_i\lambda_k\sum_1^{r\,s} c_{iks}\, X_s f = \omega\sum_1^{r\,s}\lambda_s X_s f\,,$$

die in die folgenden r Gleichungen zerfällt

$$\text{(2)}\qquad \overline{\sum^i\sum^k}_1^r e_i\lambda_k c_{iks} = \omega\lambda_s\,,\qquad s = 1\cdots r\,.$$

Diese r in $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ linearen und homogenen Gleichungen können nur dann für Werte von λ bestehen, die nicht sämtlich Null sind, wenn ihre Determinante verschwindet:

$$\text{(3)}\quad \Delta \equiv \begin{vmatrix} \sum_1^{r\,i} e_i c_{i11} - \omega & \sum_1^{r\,i} e_i c_{i21} & \cdot & \sum_1^{r\,i} e_i c_{ir1} \\ \sum_1^{r\,i} e_i c_{i12} & \sum_1^{r\,i} e_i c_{i22} - \omega & \cdot & \sum_1^{r\,i} e_i e_{ir2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_1^{r\,i} e_i c_{i1r} & \sum_1^{r\,i} e_i c_{i2r} & \cdot & \sum_1^{r\,i} e_i c_{irr} - \omega \end{vmatrix} = 0$$

Zugleich existiert für jede von Null verschiedene Wurzel ω der Gleichung (3) ein Wertsystem $\lambda_1 \ldots \lambda_r$, welches den Gleichungen (2) und damit der Gleichung (1) genügt.

Dass die Gleichung (3) sicher eine verschwindende Wurzel ω besitzt, erkennen wir sofort, wenn wir

$$\lambda_k = e_k \quad k = 1\cdots r$$

setzen, denn es ist

$$\left(\sum^i e_i X_i f\,,\ \sum^k e_k X_k f\right) \equiv 0\,,$$

Gleichung (3) hat also, nach Potenzen von ω entwickelt, die Form

$$\text{(4)}\qquad \omega^r - \psi_1(e)\omega^{r-1} + \psi_2(e)\omega^{r-2} - \cdots \pm \psi_{r-1}(e)\omega = 0\,,$$

wo die $\psi(e)$ ganze, homogene Funktionen der Coefficienten $e_1 \cdots e_r$ sind.

Anmerkung. Setzen wir zur Abkürzung

$$(\alpha)\qquad \sum_1^{r\,i} e_i c_{ikj} \equiv \gamma_{kj}\,,$$

so folgt daraus, dass $\omega = 0$ eine Wurzel der Gl. (3) ist, auch, dass stets

$$(\beta)\qquad \sum \pm\, \gamma_{11}\gamma_{22}\cdots\gamma_{rr} \equiv 0\,.$$

Nun waren nach § 1 die infinitesimalen Transformationen der adjungierten Gruppe

$$E_k f \equiv \sum_{ij}^{1\ldots r} e_i c_{ikj}\,\frac{\partial f}{\partial e_j}$$

oder, nach (α)

$$E_k f \equiv \sum_1^{r\,j} \gamma_{kj}\,\frac{\partial f}{\partial e_j}\ ;$$

das Verschwinden der Determinante $\sum \pm \gamma_{11}\gamma_{22}\cdots\gamma_{rr}$ bedeutet demnach, dass die adjungierte Gruppe einer r-gliedrigen Gruppe $X_1f\cdots X_rf$ stets *intransitiv* ist. (Über den Begriff »intransitiv« vgl. Lie, Transformationsgruppen I, § 58.)

Die Gleichung (3) oder (4), $\Delta = 0$, bezeichnen wir nach Killing als *charakteristische Gleichung* einer r-gliedrigen Gruppe, dementsprechend die linke Seite der Gleichung (3) als die *charakteristische Determinante* Δ einer r-gliedrigen Gruppe.

Die Berechtigung dieser Bezeichnungen erhellt aus einigen wichtigen Eigenschaften der Determinante Δ, die im Folgenden abgeleitet werden sollen.

Betrachten wir Δ als Funktion der Coefficienten $e_1 \ldots e_r$, so gilt zunächst der wichtige

Satz 2. *Die Determinante Δ bleibt bei allen Transformationen der adjungierten Gruppe invariant, es ist also*

$$E_\mu \Delta \equiv 0.$$

Killing[1]) beweist den Satz, indem er aus der Jacobi'schen Identität gewisse Relationen zwischen den c_{iks} ableitet und daraus der Reihe nach die Invarianz der Coefficienten $\psi_1(e)$, $\psi_2(e)$, $\cdots$ der Gleichung (4) nachweist. Engel[2]) giebt einen direkten Beweis, der bereits in einer Note zum 1. Teile der Killing'schen Untersuchungen abgedruckt ist; der Vollständigkeit halber soll derselbe hier wiederholt werden.

Das allgemeine Glied der Determinante Δ hat die Form

$$(5)\qquad \sum_1^r{}^i c_{ikj} e_i - \varepsilon_{kj}\omega = \alpha_{kj},$$

sobald wir setzen

$$(6)\qquad \varepsilon_{kj} = 1 \text{ für } k = j, \quad \varepsilon_{kj} = 0 \text{ für } k \neq j.$$

Dann ist

$$\Delta \equiv \sum \pm \alpha_{11}\alpha_{22}\cdots\alpha_{rr}$$

und

$$E_\mu \Delta \equiv \sum_1^r{}^s c_{s\mu 1} e_s \frac{\partial \Delta}{\partial e_1} + \sum_1^r{}^s c_{s\mu 2} e_s \frac{\partial \Delta}{\partial e_2} + \cdots + \sum_1^r{}^s c_{s\mu r} e_s \frac{\partial \Delta}{\partial e_r}.$$

Nun ist

$$\frac{\partial \Delta}{\partial e_i} = \sum_{kj}^{1\ldots r} \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{kj}} \frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial e_i},$$

also

1) Killing, I. Math. Ann. Bd. XXXI, 1888, § 2, S. 259 ff.
2) a. a. O. S. 262 f.

$$E_\mu \varDelta \equiv \sum_{kj}^{1\ldots r} \frac{\partial \varDelta}{\partial \alpha_{kj}} \left\{ \sum_1^r {}_s\, c_{s\mu 1} e_s \frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial e_1} + \cdots + \sum_1^r {}_s\, c_{s\mu r} e_s \frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial e_r} \right\}$$

$$\equiv \sum_{kj}^{1\ldots r} \frac{\partial \varDelta}{\partial \alpha_{kj}} E_\mu \alpha_{kj} \; ;$$

da nun

$$\frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial e_\nu} = c_{\nu kj} \, , \quad \text{so ist} \quad E_\mu \alpha_{kj} = \sum_{s\nu}^{1\ldots r} c_{s\mu\nu} c_{\nu kj} e_s \, .$$

Benutzen wir ferner die zwischen den c_{iks} bestehenden Relationen

$$\sum_1^r {}_\nu \, (c_{s\mu\nu} c_{\nu kj} + c_{\mu k\nu} c_{\nu sj} + c_{ks\nu} c_{\nu\mu j}) = 0 \, , \quad s, \mu, k, j = 1 \cdots r \, ,$$

die sich unmittelbar aus der Jacobi'schen Identität zwischen X_s, X_μ, X_k ergeben, so wird

$$E_\mu \alpha_{kj} \equiv - \sum_{\nu s}^{1\ldots r} (c_{\mu k\nu} c_{\nu sj} + c_{ks\nu} c_{\nu\mu j}) e_s \equiv \sum_{\nu s}^{1\ldots r} (c_{\mu k\nu} c_{s\nu j} + c_{sk\nu} c_{\nu\mu j}) e_s \, .$$

Da ferner nach Gleichung (5)

$$\sum_1^r {}_s \, c_{s\nu j} e_s = \alpha_{\nu j} + \varepsilon_{kj} \omega \, ,$$

so ist

$$E_\mu \alpha_{kj} \equiv \sum_1^r {}_\nu \left\{ c_{\mu k\nu} (\alpha_{\nu j} + \varepsilon_{kj} \omega) + c_{\nu\mu j} (\alpha_{k\nu} + \varepsilon_{k\nu} \omega) \right\} \, , \quad k, j = 1 \cdots r \, .$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit $\frac{\partial \varDelta}{\partial \alpha_{kj}}$ und summieren über k und j, so folgt

$$\sum_{kj}^{1\ldots r} \frac{\partial \varDelta}{\partial \alpha_{kj}} E_\mu \alpha_{kj} = \sum_1^r {}_\nu \sum_{kj}^{1\ldots r} \frac{\partial \varDelta}{\partial \alpha_{kj}} (c_{\mu k\nu} \alpha_{\nu j} + c_{\nu\mu j} \alpha_{k\nu}) \, ,$$

denn sämmtliche Glieder, in denen ε_{kj} auftritt, heben sich nach (6) weg; die linke Seite der letzten Gleichung ist aber nach dem Vorhergehenden gleich $E_\mu \varDelta$; also ist

$$E_\mu \varDelta \equiv \sum_1^r {}_\nu \sum_{kj}^{1\ldots r} \frac{\partial \varDelta}{\partial \alpha_{kj}} (c_{\mu k\nu} \alpha_{\nu j} + c_{\nu\mu j} \alpha_{k\nu})$$

oder

$$E_\mu \varDelta \equiv \sum_{k\nu}^{1\ldots r} c_{\mu k\nu} \sum_1^r {}_j \frac{\partial \varDelta}{\partial \alpha_{kj}} \cdot \alpha_{\nu j} + \sum_{\nu j}^{1\ldots r} c_{\nu\mu j} \sum_1^r {}_k \frac{\partial \varDelta}{\partial \alpha_{kj}} \alpha_{k\nu} \, .$$

Berücksichtigen wir noch, dass

$$\sum_1^r {}_j \, \alpha_{\nu j} \frac{\partial \varDelta}{\partial \alpha_{kj}} = 0 \quad \text{für } \nu \neq k, \quad \text{und} \quad \sum_1^r {}_j \, \alpha_{kj} \frac{\partial \varDelta}{\partial \alpha_{kj}} = \varDelta \, ,$$

so wird

$$E_\mu \varDelta = \varDelta \left\{ \sum_1^r {}_k \, c_{\mu kk} + \sum_1^r {}_j \, c_{j\mu j} \right\} \, ,$$

und da $c_{\mu kk} = - c_{k\mu k}$, so verschwindet der Faktor von $\varDelta$ identisch und wir erhalten

$$E_\mu \varDelta \equiv 0 .$$

Damit ist Satz 2 bewiesen.

Es wird ferner von Wichtigkeit sein, zu erkennen, in wie weit die charakteristische Determinante verändert wird, wenn wir an Stelle der ursprünglichen r unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1 f \ldots X_r f$ r neue, unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe zur Bestimmung der r-gliedrigen Gruppe wählen.

Definieren wir also r neue, unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1' f \ldots X_r' f$ der Gruppe durch die Gleichungen

$$(7) \qquad X_i f = \sum_1^r {}^{\varrho}\, a_{i\varrho} X_\varrho' f \qquad i = 1 \cdots r ,$$

wo die $a_{i\varrho}$ Constante bedeuten, deren Determinante nicht identisch verschwindet.

Dann erfüllen $X_1' f \ldots X_r' f$ Relationen von der Form

$$(X_i' X_k') = \sum_1^r {}^{\tau}\, c_{ik\tau}' X_\tau' f .$$

Die $c_{ik\tau}'$ sind lineare homogene Funktionen der c_{iks} und erfüllen die Gleichungen

$$(8) \qquad \overline{\sum^{\mu} \sum^{\nu}}_1^r a_{i\mu} a_{k\nu} c_{\mu\nu\varrho}' = \sum_1^r {}^{s}\, c_{iks} a_{s\varrho}$$

$$i, k, \varrho = 1 \cdots r ,$$

wie sich unmittelbar ergiebt, wenn wir in die $(X_i X_k)$ vermöge der Transformationsgleichungen (7) die $X_i' f$ einführen.

Ferner ist

$$\sum_1^r {}^{i}\, e_i X_i f$$

die allgemeine infinitesimale Transformation der Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$; *dieselbe* Transformation wird, in den $X_1' f \ldots X_r' f$ geschrieben, die Form haben

$$\sum_1^r {}^{i}\, e_i' X_i' f ,$$

so dass also

$$\sum_1^r {}^{i}\, e_i X_i f = \sum_1^r {}^{i}\, e_i' X_i' f .$$

Um die $e_1' \ldots e_r'$ zu bestimmen, haben wir in der linken Seite dieser Gleichung die Substitutionen (7) auszuführen:

$$\sum_1^r {}_i\, e_i \sum_1^r {}_\varrho\, a_{i\varrho} X_\varrho' f = \sum_1^r {}_\nu\, e_\nu' X_\nu' f\,;$$

es ergiebt sich

$$(9) \qquad e_\nu' = \sum_1^r {}_i\, a_{i\nu} e_i \qquad \nu = 1 \cdots r\,.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen (9) berechnen wir zunächst, in welcher Weise sich die zu $X_1 f \ldots X_r f$ gehörige adjungierte Gruppe $E_1 f \ldots E_r f$ ausdrückt durch die aus $X_1' f \ldots X_r' f$ gebildete adjungierte Gruppe $E_1' f \ldots E_r' f$.

Führen wir in

$$E_k f \equiv \sum_{ij}^{1\ldots r} c_{ikj} e_i \frac{\partial f}{\partial e_j} \qquad k = 1 \cdots r$$

die $e_1' \ldots e_r'$ als neue Veränderliche ein, so wird

$$E_k f = \sum_1^r {}_\varrho\, E_k e_\varrho' \frac{\partial f}{\partial e_\varrho'} = \sum_{i\varrho}^{1\ldots r} e_i \left\{ \sum_1^r {}_j\, c_{ikj} a_{j\varrho} \right\} \frac{\partial f}{\partial e_\varrho'}\,,$$

und dies wird vermöge der Gleichungen (8)

$$E_k f = \sum_{i\mu\nu\varrho}^{1\ldots r} e_i a_{i\mu} \alpha_{k\nu} c_{\mu\nu\varrho}' \frac{\partial f}{\partial e_\varrho'}$$

und nach (9)

$$(10) \qquad E_k f = \sum_{\mu\nu\varrho}^{1\ldots r} e_\mu' a_{k\nu} c_{\mu\nu\varrho}' \frac{\partial f}{\partial e_\varrho'}\,.$$

Da anderseits

$$(X_\mu' X_\nu') = \sum_1^r {}_\varrho\, c_{\mu\nu\varrho}' X_\varrho'\,,$$

so haben die infinitesimalen Transformationen der aus $X_1' f \ldots X_r' f$ gebildeten adjungierten Gruppe $E_1' f \ldots E_r' f$ offenbar die Form

$$E_\nu' f = \sum_{\mu\varrho}^{1\ldots r} c_{\mu\nu\varrho}' e_\mu' \frac{\partial f}{\partial e_\varrho'}\,.$$

Ein Vergleich dieser Formeln mit den Formeln (10) giebt uns die Transformationsgleichungen der adjungierten Gruppe:

$$(11) \qquad E_k f = \sum_1^r {}_\nu\, a_{k\nu} E_\nu' f \qquad k = 1 \ldots r\,.$$

Wir sprechen unser Resultat in folgendem Satze aus:

Satz 3. *Ersetzt man die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1 f \ldots X_r f$ einer r-gliedrigen Gruppe durch r neue unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1' f \ldots X_r' f$ der Gruppe, die durch die r Gleichungen bestimmt sind*

$$X_i f = \sum_1^r {}_\nu\, a_{i\nu} X_\nu' f\,, \quad i = 1 \cdots r\,, \quad |a_{i\nu}| \neq 0\,,$$

so ist die zu den $X_1'f \dots X_r'f$ gehörige adjungierte Gruppe $E_1'f \dots E_r'f$ bestimmt durch die r Gleichungen

$$E_i f = \sum_1^r {}^\nu a_{i\nu} E_\nu' f \ ,$$

wo $E_1 f \dots E_r f$ die aus $X_1 f \dots X_r f$ gebildete adjungierte Gruppe ist.

Nunmehr ist unsre eigentliche Aufgabe rasch zu erledigen. Das allgemeine Glied der Determinante Δ hatten wir oben bezeichnet durch

$$\sum_1^r {}^i c_{ikj} e_i - \varepsilon_{kj}\omega \equiv \alpha_{kj} \qquad \begin{cases} \varepsilon_{kj} = 1 & \text{für } k = j \\ \varepsilon_{kj} = 0 & \text{ - } k \neq j \ . \end{cases}$$

Multiplizieren wir diese Identität mit a_{js} und summieren beiderseits nach j, so erhalten wir

$$(12) \qquad \sum_1^r {}^i e_i \sum_1^r {}^j c_{ikj} a_{js} - \sum_1^r {}^j \varepsilon_{kj} a_{js}\omega \equiv \sum_1^r {}^j a_{js}\alpha_{kj} \ .$$

Für die linke Seite dieser Identität können wir nach (8) auch schreiben

$$\sum_1^r {}^i e_i \sum_{\mu\nu}^{1\dots r} a_{i\mu} a_{k\nu} c_{\mu\nu s}' - a_{ks}\omega \ ,$$

und, wenn wir nach i summieren und die Gleichungen (9) berücksichtigen:

$$\sum_{\mu\nu}^{1\dots r} e_\mu' c_{\mu\nu s}' a_{k\nu} - a_{ks}\omega \ .$$

Andrerseits wird das allgemeine Glied der Determinante Δ, geschrieben in den $e_1' \dots e_r'$, die Form haben

$$\sum_1^r {}^\mu c_{\mu\nu s}' e_\mu' - \varepsilon_{\nu s}\omega \equiv \alpha_{\nu s}' \ ,$$

also

$$\sum_1^r {}^\mu c_{\mu\nu s}' e_\mu' \equiv \alpha_{\nu s}' + \varepsilon_{\nu s}\omega \ ;$$

dadurch erhält die linke Seite der Identität (12) die Form

$$\sum_1^r {}^\nu (\alpha_{\nu s}' + \varepsilon_{\nu s}\omega) a_{k\nu} - a_{ks}\omega \ ;$$

dies reduziert sich auf

$$\sum_1^r {}^\nu a_{k\nu}\alpha_{\nu s}'$$

und es besteht sonach die identische Relation

$$(13) \qquad \sum_1^r {}^\nu a_{k\nu}\alpha_{\nu s}' \equiv \sum_1^r {}^j a_{js}\alpha_{kj} \ , \quad k,\ s = 1 \cdots r \ .$$

Die aus den r^2 Gliedern der linken Seite gebildete Determinante

$$\begin{vmatrix} \sum_1^r {}^\nu a_{1\nu}\alpha_{\nu 1}' & \sum_1^r {}^\nu a_{1\nu}\alpha_{\nu 2}' & \cdot & \sum_1^r {}^\nu a_{1\nu}\alpha_{\nu r}' \\ \sum_1^r {}^\nu a_{2\nu}\alpha_{\nu 1}' & \sum_1^r {}^\nu a_{2\nu}\alpha_{\nu 2}' & \cdot & \sum_1^r {}^\nu a_{2\nu}\alpha_{\nu r}' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_1^r {}^\nu a_{r\nu}\alpha_{\nu 1}' & \sum_1^r {}^\nu a_{r\nu}\alpha_{\nu 2}' & \cdot & \sum_1^r {}^\nu a_{r\nu}\alpha_{\nu r}' \end{vmatrix}$$

wird das Produkt der beiden Determinanten $|a_{k\nu}|$ und $|\alpha_{\nu s}'|$, ebenso zerlegt sich die aus den r^2 Grössen der rechten Seite von (13) gebildete Determinante in das Produkt

$$|a_{js}| \cdot |\alpha_{kj}| \;,$$

also ist

$$|\alpha_{kj}'| = |\alpha_{kj}| \;.$$

Setzen wir

$$|a_{js}| \equiv A$$

und bezeichnen, wie üblich, die zu a_{ik} gehörige, $(r - 1)$ reihige Unterdeterminante von A mit

$$\frac{\partial A}{\partial a_{ik}} \;,$$

so folgt aus den Identitäten (13)

$$\alpha_{\mu s}' = \frac{1}{A} \sum_{kj}^{1\ldots r} \frac{\partial A}{\partial a_{k\mu}} a_{js}\alpha_{kj} \tag{14}$$

oder, wenn wir abkürzend setzen

$$\lambda_{ks} \equiv \sum_1^r {}^j a_{js}\alpha_{kj} \;, \tag{15}$$

so ist

$$\alpha_{\mu s}' = \frac{1}{A} \sum_1^r {}^k \frac{\partial A}{\partial a_{k\mu}} \lambda_{ks} \;. \tag{16}$$

Jedes $\alpha_{\mu s}'$ ist also eine lineare homogene Funktion der α_{kj}; wir werden sogleich erkennen, dass auch jede m-reihige Unterdeterminante der $|\alpha_{\mu s}'|$ eine lineare, homogene Funktion der m-reihigen Unterdeterminanten der $|\alpha_{kj}|$ ist.

Bilden wir z. B. die m-reihige Unterdeterminante $\sum \pm \alpha_{11}'\alpha_{22}'\ldots\alpha_{mm}'$, so ist nach bekannten Determinantensätzen

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}' & \cdots & \alpha_{1m}' \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{m1}' & \cdots & \alpha_{mm}' \end{vmatrix} = \frac{1}{A^m} \begin{vmatrix} \frac{\partial A}{\partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial A}{\partial a_{r1}} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial A}{\partial a_{1m}} & \cdots & \frac{\partial A}{\partial a_{rm}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{r1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \lambda_{1m} & \cdots & \lambda_{rm} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{A^m} \begin{vmatrix} \frac{\partial A}{\partial a_{11}} & \cdot & \frac{\partial A}{\partial a_{m1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial A}{\partial a_{1m}} & \cdot & \frac{\partial A}{\partial a_{mm}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \cdot & \lambda_{m1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{1m} & \cdot & \lambda_{mm} \end{vmatrix} + \cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder Produkte aus je einer m-reihigen Determinante der Matrix

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial A}{\partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial A}{\partial a_{r1}} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial A}{\partial a_{1m}} & \cdots & \frac{\partial A}{\partial a_{rm}} \end{vmatrix}$$

mit der entsprechenden m-reihigen Determinante der Matrix

$$\begin{vmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{r1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \lambda_{1m} & \cdots & \lambda_{rm} \end{vmatrix}$$

sind. Aus den Gleichungen (15) für die λ_{ks} folgt andrerseits, dass sich jede m-reihige Determinante der λ_{ks} linear und homogen ausdrücken lässt durch gewisse m-reihige Determinanten der α_{ik}; es wird z. B.

$$\begin{vmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{m1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \lambda_{1m} & \cdots & \lambda_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{1m} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mm} \end{vmatrix} + \cdots,$$

wo die weggelassnen Glieder Produkte je zweier entsprechender Determinanten $m$ten Grades der Matricen

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{r1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{1m} & \cdots & a_{rm} \end{vmatrix} \quad \text{bez.} \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1r} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mr} \end{vmatrix}$$

sind; daraus folgt, dass die m-reihige Unterdeterminante $\sum \pm \alpha_{11}' \ldots \alpha_{mm}'$ eine lineare, homogene Funktion gewisser m-reihiger Unterdeter-

minanten von $|\alpha_{kj}|$ ist; es ist evident, dass dies ebenso für alle m-reihigen Unterdeterminanten von $|\alpha_{kj}'|$ gilt und dass umgekehrt auch alle m-reihigen Unterdeterminanten von $|\alpha_{kj}|$ lineare, homogene Funktionen der m-reihigen Unterdeterminanten von $|\alpha_{kj}'|$ sind. Wir fassen diese wichtigen Ergebnisse zusammen in dem

Satz 4. *Die Form der charakteristischen Determinante Δ ist unabhängig von der Wahl der r unabhängigen, infinitesimalen Transformationen der r-gliedrigen Gruppe. Geht die zu einer Transformation allgemeiner Lage $\sum e_k X_k f$ gehörige charakteristische Determinante Δ bei irgend einer Transformation der Gruppe über in die charakteristische Determinante Δ' der entsprechenden Transformation $\sum e_k' X_k' f$, und verschwinden für das Wertsystem $e_1 \dots e_r$, ω alle m-reihigen Unterdeterminanten Δ, so verschwinden für das Wertsystem $e_1' \dots e_r'$, ω alle m-reihigen Unterdeterminanten von Δ'.*

Killing begründet nun auf die in den Sätzen 2 und 4 ausgesprochnen, bedeutsamen Eigenschaften der charakteristischen Gleichung $\Delta = 0$ eine neue, wichtige Einteilung der continuierlichen, endlichen Transformationsgruppen.

Legen wir die charakteristische Gleichung $\Delta = 0$ in der entwickelten Form (4) zu Grunde

$$\omega^r - \psi_1(e)\,\omega^{r-1} + \cdots \pm \psi_{r-1}(e)\,\omega = 0 \ , \tag{4}$$

so soll l die Anzahl der von einander unabhängigen unter den Funktionen $\psi(e)$ bezeichnen und die Gruppen sollen nach dem zugehörigen Werte von l eingeteilt werden. Diese Zahl l nennt Killing[1]) den *Rang* der Gruppe.

Ist also z. B. $l = 0$, dann verschwinden sämtliche Funktionen $\psi_1(e)$, $\psi_2(e) \cdots \psi_{r-1}(e)$ identisch, die Gruppe hat den Rang Null; ist $l = 1$, dann lassen sich sämtliche nicht identisch verschwindenden Funktionen $\psi(e)$ durch eine einzige unter ihnen ausdrücken, die Gruppe besitzt den Rang 1; u. s. w.

Das am Eingange dieses Paragraphen gestellte Problem, alle 2-gliedrigen Untergruppen der r-gliedrigen Gruppe zu bestimmen, in denen eine gegebene, infinitesimale Transformation $\sum_1^r{}^i\, e_i X_i f$ enthalten ist, haben wir bisher nur mit der Beschränkung behandelt, dass $\sum_1^r{}^i\, e_i X_i f$ in keiner 2-gliedrigen Untergruppe die 1. derivierte Gruppe

1) Killing, Z. v. Gr. I. § 4. S. 266 ff.

sein sollte; es erübrigt daher noch, auch diesen bisher ausgeschlossnen Fall näher zu untersuchen.

Es wird die Betrachtungen wesentlich vereinfachen und das Resultat nicht beeinflussen, wenn wir an Stelle der allgemeinen infinitesimalen Transformation $\sum_1^r {}^i e_i X_i f$ die infinitesimale Transformation $X_1 f$ zum Ausgangspunkt nehmen.

Es sei also durch r unabhängige, infinitesimale Transformationen $X_1 f \ldots X_r f$ eine r-gliedrige Gruppe bestimmt und irgend eine Transformation $X_1 f$ bilde mit einer zweiten, von $X_1 f$ unabhängigen Transformation, die wir durch $X_2 f$ bezeichnen wollen, eine 2-gliedrige Untergruppe, deren 1. derivierte Gruppe $X_1 f$ sei, also

$$(X_1 X_2) = X_1 f \ .$$

Wir stellen uns jetzt die Frage: Ist es möglich, dass $X_1 f$ noch in anderen 2-gliedrigen Untergruppen der gegebenen r-gliedrigen Gruppe enthalten ist, ohne in diesen die 1. derivierte Gruppe zu bilden?

Wir werden beweisen, dass diese Annahme für endliche Gruppen unmöglich ist.

Wäre z. B. X_1, X_3 eine 2-gliedrige Untergruppe von der geforderten Eigenschaft, also

$$(X_1 X_3) = X_3 \, ,$$

wo X_3 notwendig von X_1 und X_2 unabhängig ist, so bilden wir die Jacobische Identität zwischen X_1, X_2, X_3. Es möge gestattet sein, in allen folgenden Untersuchungen durch das Symbol

$$(X_i X_k X_j)$$

anzudeuten, dass zwischen X_i, X_k und X_j die Jacobi'sche Identität gebildet werden soll, also

$$(X_i X_k X_j) \equiv ((X_i X_k) X_j) + ((X_k X_j) X_i) + ((X_j X_i) X_k) \equiv 0 \ .$$

Nun giebt

$$(X_1 X_2 X_3) \equiv X_3 + ((X_2 X_3) X_1) + (X_2 X_3) \equiv 0 \ .$$

Hätte $(X_2 X_3)$ die Form

$$(X_2 X_3) = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 \ ,$$

so wäre

$$X_3 - \alpha_2 X_1 - \alpha_3 X_3 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 \equiv 0 \ ,$$

also

$$X_3 + (\alpha_1 - \alpha_2) X_1 + \alpha_2 X_2 \equiv 0,$$

und dies würde geben

$$\alpha_2 = 0 \quad \alpha_1 = 0 \quad X_3 \equiv 0 \ ,$$

das Letztere ist aber absurd, mithin muss $(X_2 X_3)$ unabhängig von X_1, X_2 und X_3 sein; wir setzen

$$(X_2 X_3) = X_4 \ ,$$

dann giebt $(X_1 X_2 X_3)$:

$$(X_1 X_4) = X_3 + X_4 \ .$$

Bilden wir ebenso $(X_1 X_2 X_4)$:

$$(X_1 X_2 X_4) \equiv X_3 + X_4 + ((X_2 X_4) X_1) + X_4 + (X_2 X_4) \equiv 0 \ ,$$

oder

$$X_3 + 2 X_4 + (X_2 X_4) \equiv (X_1 (X_2 X_4)) \ .$$

Wäre $(X_2 X_4)$ von $X_1 \dots X_4$ abhängig, so würde $X_4 \equiv 0$ folgen; mithin können wir setzen

$$(X_2 X_4) = X_5 \ ,$$

dann wird

$$(X_1 X_5) = X_3 + 2 X_4 + X_5 \ .$$

Jetzt finden wir wieder aus $(X_1 X_2 X_5) \equiv 0$, dass $(X_2 X_5)$ unabhängig von $X_1 \dots X_5$ sein muss, so dass wir annehmen können

$$(X_2 X_5) = X_6 \ ,$$

und dies giebt

$$(X_1 X_6) = X_3 + 3 X_4 + 3 X_5 + X_6 \ .$$

Aus $(X_1 X_2 X_6) \equiv 0$ folgt weiter, dass $(X_2 X_6)$ unabhängig von $X_1 \dots X_6$ sein muss; also setzen wir

$$(X_2 X_6) = X_7 \ ,$$

dann ist

$$(X_1 X_7) = X_3 + 4 X_4 + 6 X_5 + 4 X_6 + X_7 \ .$$

Nunmehr lässt sich erkennen, dass unter unseren Voraussetzungen jedes $(X_1 X_k)$ aus $X_3 \dots X_k$ linear abgeleitet ist und zwar sind die Coefficienten der $X_3 \dots X_k$ identisch mit den Binomialcoefficienten; jedes $(X_2 X_k)$ aber wird X_{k+1}. Setzen wir nun allgemein

$$(X_2 X_{m+1}) = X_{m+2}$$

$$(X_1 X_{m+2}) = X_3 + (m-1) X_4 + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} X_5 + \cdots + (m-1) X_{m+1} + X_{m+2} \ ,$$

dann giebt die Jacobi'sche Identität zwischen X_1, X_2, X_{m+2}:

$$X_3 + (m-1) X_4 + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} X_5 + \cdots + (m-1) X_{m+1} + X_{m+2} + ((X_2 X_{m+2}) X_1) + X_4 + (m-1) X_5 + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} X_6 + \cdots + (m-1) X_{m+2} + (X_2 X_{m+2}) \equiv 0 \ ,$$

also

$$(X_1(X_2 X_{m+2})) \equiv X_3 + m X_4 + \frac{m(m-1)}{2} X_5 + \cdots$$
$$+ m X_{m+2} + (X_2 X_{m+2}) \; .$$

Daraus folgt aber wiederum, dass $(X_2 X_{m+2})$ unabhängig von $X_1 \ldots X_{m+2}$ sein muss, also

$$(X_2 X_{m+2}) = X_{m+3}$$

gesetzt werden kann; die Zahl m aber ist ganz beliebig, unsre Gruppe müsste also eine unbegrenzte Zahl unabhängiger Transformationen enthalten, folglich ist unsre Annahme für *endliche* Gruppen unerfüllbar.

Dann gilt aber der

Satz 5[1]. *Ist $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ die 1. derivierte Gruppe einer 2-gliedrigen Untergruppe der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$, so hat die charakteristische Gleichung $\Delta = 0$ für das Wertsystem $e_1 \ldots e_r$ lauter verschwindende Wurzeln ω.*

Dieser Satz ergiebt sich unmittelbar aus den vorhergehenden Entwicklungen.

Hätte nämlich die Gleichung $\Delta = 0$ eine von Null verschiedene Wurzel ω, so gäbe es eine infinitesimale Transformation der Gruppe, etwa X_3, dass, wenn wir abkürzend setzen

$$\sum_1^r e_i X_i f = X_1 f \; ,$$

die Beziehung bestände

$$(X_1 X_3) = \omega X_3 f \quad \omega \neq 0 \; .$$

Hier können wir X_1 immer mit einer Constanten multiplizieren, so dass

$$(X_1 X_3) = X_3 f \; .$$

Ausserdem aber soll $X_1 f$ die 1. derivierte Gruppe einer 2-gliedrigen Untergruppe sein, etwa der Untergruppe X_1, X_2; also wäre auch

$$(X_1 X_2) = X_1 f \; ,$$

d. h. es läge der Fall vor, der nach Obigem nur für unendliche Gruppen denkbar ist; mithin kann keine Wurzel ω der charakteristischen Gleichung existieren, die nicht Null ist.

§ 3.

Die charakteristische Gleichung hat k verschwindende Wurzeln ($k > 1$)[2].

In dem ersten Teile seiner eingangs erwähnten Untersuchungen bestimmt Killing die Zusammensetzung aller Gruppen, für welche die charakteristische Gleichung nur *eine* verschwindende Wurzel ω

1) Vgl. Killing, Z. v. Gr. I, S. 270.

2) Vgl. hierzu Killing, Z. v. Gr. II. Math. Ann. Bd. XXXIII, 1889. S. 4 ff.

besitzt. Da dieser Fall für unsre folgenden Entwicklungen nicht in Frage kommt, so übergehen wir denselben, um sogleich den Fall näher ins Auge zu fassen, dass die charakteristische Gleichung mehrere verschwindende Wurzeln ω hat.

Nehmen wir also an, für irgend eine Transformation, etwa $X_r f$, der Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ besitze die charakteristische Gleichung $\Delta = 0$ k verschwindende Wurzeln ω, wo $1 < k < r$ sei; ausserdem wollen wir noch voraussetzen, dass für $\omega = 0$ nicht alle $(r-1)$reihigen Unterdeterminanten von Δ verschwinden.

Die charakteristische Gleichung für $X_r f$ lautet, da $e_1 = e_2 = \cdots = e_{r-1} = 0 \quad e_r = 1$:

$$(17) \qquad \Delta \equiv \begin{vmatrix} c_{r11} - \omega & \cdot & c_{rr-11} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{r1r-1} & \cdot & c_{rr-1r-1} - \omega & 0 \\ c_{r1r} & \cdot & c_{rr-1r} & -\omega \end{vmatrix} = 0 ,$$

sie reduziert sich also sofort auf die folgende:

$$\omega \cdot \begin{vmatrix} c_{r11} - \omega & \cdot & c_{rr-11} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{r1r-1} & \cdot & c_{rr-1r-1} - \omega \end{vmatrix} = 0 ;$$

und da $\omega = 0$ mindestens eine zweifache Wurzel sein soll, so muss auch der Faktor von ω für $\omega = 0$ verschwinden:

$$(18) \qquad \begin{vmatrix} c_{r11} & \cdot & c_{rr-11} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{r1r-1} & \cdot & c_{rr-1r-1} \end{vmatrix} = 0 .$$

Dies wird uns aber auf einen Widerspruch mit unseren Voraussetzungen führen.

Stellen wir uns nämlich die Aufgabe, eine infinitesimale Transformation $\sum_1^{r-1} {}^i \alpha_i X_i f$ so zu bestimmen, dass

$$(19) \qquad \left(X_r , \sum_1^{r-1} {}^i \alpha_i X_i \right) = X_r f ,$$

so ergiebt sich

$$\sum_1^{r-1} {}^i \alpha_i (X_r X_i) = \sum_1^{r-1} {}^i \alpha_i \sum_1^{r} {}^s c_{ris} X_s f = X_r f ;$$

die α müssen also den folgenden r Gleichungen genügen

$$(19') \qquad \sum_1^{r-1} {}^i \alpha_i c_{ris} = 0 \quad s = 1 \cdots r-1 , \sum_1^{r-1} {}^i \alpha_i c_{rir} = 1$$

Die Determinante der $r-1$ ersten Gleichungen verschwindet, wie wir oben gesehen haben (Formel 18), dieselben reduzieren sich also auf $r-2$ unabhängige Gleichungen, die mit der letzten Gleichung in (19′) ein System von $r-1$ von einander unabhängigen, linearen Gleichungen zur Bestimmung der $(r-1)$ Grössen $\alpha_1 \ldots \alpha_{r-1}$ geben, und da nach Voraussetzung nicht alle $(r-1)$ reihigen Unterdeterminanten von Δ verschwinden sollen, so giebt es immer solche nicht sämmtlich verschwindende Werte der α, welche das Gleichungssystem (19′) und also auch die Gleichung (19) erfüllen; dann ist aber $X_r f$ die 1. derivierte Gruppe einer 2-gliedrigen Untergruppe, und in diesem Falle muss nach Satz 5 die charakteristische Gleichung für $X_r f$ lauter verschwindende Wurzeln haben, was im Widerspruch steht mit unsrer Annahme, dass $k < r$; demnach ist die Voraussetzung, dass nicht alle $(r-1)$ reihigen Unterdeterminanten von Δ für $\omega = 0$ verschwinden sollen, unerfüllbar und es gilt der

Satz 6[1]. *Wenn für ein Wertsystem $e_1 \ldots e_r$ die charakteristische Gleichung k verschwindende Wurzeln besitzt, wo $1 < k < r$, so sind für dieses Wertsystem in der Determinante*

$$\Delta \equiv \left| \sum_1^r {}^i c_{ikj} e_i \right|$$

alle $(r-1)$ reihigen Unterdeterminanten gleich Null.

Diesen Satz auszudehnen auf den Fall $k = r$ ist nicht gestattet für ein spezielles Wertsystem $e_1 \ldots e_r$; bezeichnet dagegen $e_1 \ldots e_r$ in dem Bildraume R_{r-1} einen Punkt von allgemeiner Lage und hat die charakteristische Gleichung für dieses Wertsystem $e_1 \ldots e_r$ $k = r$ verschwindende Wurzeln, so besitzt die Gruppe den Rang Null, und eine Gruppe vom Range Null enthält keine 2-gliedrigen Untergruppen, deren Transformationen nicht vertauschbar sind; mithin können wir unsern letzten Satz allgemeiner fassen:

Satz 7. *Hat die charakteristische Gleichung für alle Werte von $e_1 \ldots e_r$ $k > 1$ verschwindende Wurzeln, so sind alle $(r-1)$ gliedrigen Unterdeterminanten der charakteristischen Determinante*

$$\Delta \equiv \left| \sum_1^r {}^i c_{ikj} e_i \right|$$

identisch Null.

Nehmen wir jetzt an, die charakteristische Gleichung besitze für ein bestimmtes Wertsystem $e_1 \ldots e_r$ m verschwindende Wurzeln, wo $m > 1$; es mögen ferner für $\omega = 0$ alle $(r - h + 1)$-reihigen Unterdeterminanten der Determinante $\left| \sum {}^i c_{ikj} e_i \right|$ verschwinden, nicht aber

---

[1] Killing, Z. v. Gr. II, S. 5.

alle $(r-h)$-reihigen — es muss dann notwendig $1 < h \leqq m$ sein —, wir fragen nach allen Transformationen der Gruppe, die mit der Transformation $\sum_1^r{}^k e_k X_k f$ oder kurz $X_r f$ vertauschbar sind.

Soll irgend eine Transformation

$$\varepsilon_1 X_1 f + \varepsilon_2 X_2 f + \cdots + \varepsilon_{r-1} X_{r-1} f$$

mit $X_r f$ vertauschbar sein, so müssen die r Gleichungen bestehen

$$\sum_1^{r-1}{}^i \varepsilon_i c_{ris} = 0 \quad s = 1 \cdots r, \tag{20}$$

wie aus

$$\left(X_r, \sum_1^{r-1}{}^i \varepsilon_i X_i f\right) = \varepsilon_1 (X_r X_1) + \varepsilon_2 (X_r X_2) + \cdots + \varepsilon_{r-1} (X_r X_{r-1})$$

$$= \varepsilon_1 \sum_1^r{}^s c_{r1s} X_s f + \varepsilon_2 \sum_1^r{}^s c_{r2s} X_s f + \cdots$$

$$+ \varepsilon_{r-1} \sum_1^r{}^s c_{rr-1s} X_s f$$

unmittelbar folgt.

In der zu den Gleichungen (20) gehörigen Matrix sind nach Voraussetzung alle $(r-h+1)$-reihigen Determinanten gleich Null, nicht aber alle $(r-h)$-reihigen; die r Gleichungen (20) reduzieren sich also auf $(r-h)$ unabhängige, aus denen wir $r-h$ von den $r-1$ Grössen ε bestimmen können als lineare homogene Funktionen der $h-1$ übrigen; $h-1$ von den ε bleiben also völlig willkürlich, es giebt demnach $h-1$ unabhängige infinitesimale Transformationen, die mit $X_r f$ vertauschbar sind; wir bezeichnen diese $h-1$ Transformationen mit

$$X_{r-1} f, \; X_{r-2} f \cdots X_{r-h+1} f;$$

dann ist also

$$(X_r X_{r-1}) = 0 \quad (X_r X_{r-2}) = 0 \cdots (X_r X_{r-h+1}) = 0$$

Weitere, von $X_r f$, $X_{r-1} f, \cdots X_{r-h+1} f$ unabhängige, mit $X_r f$ vertauschbare infinitesimale Transformationen der Gruppe giebt es nicht.

Die charakteristische Gleichung für $X_r f$ lautet nunmehr, da alle

$$c_{rr-h+1s} = 0, \cdots c_{rr-1s} = 0$$

für jedes $s = 1, \cdots r$:

$$\begin{vmatrix} c_{r11} - \omega & \cdot & c_{rr-h1} & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{r1r-h} & \cdot & c_{rr-hr-h} - \omega & 0 & \cdot & 0 \\ c_{r1r-h+1} & \cdot & c_{rr-hr-h+1} & -\omega & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{r1r} & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & -\omega \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt in die beiden Faktoren

$$\text{(21)}\qquad \omega^h \begin{vmatrix} c_{r11} - \omega & \cdot & c_{rr-h1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{r1r-h} & \cdot & c_{rr-hr-h} - \omega \end{vmatrix} = 0 .$$

Nach Voraussetzung ist $h \leqq m$; wir brauchen jedoch nur den Fall $h < m$ zu untersuchen, wie wir später erkennen werden; ist also $h < m$, so muss, da nach unsrer Annahme die charakteristische Gleichung m verschwindende Wurzeln hat, der Faktor von ω^h ebenfalls für $\omega = 0$ verschwinden:

$$\text{(22)}\qquad \begin{vmatrix} c_{r11} & \cdot & c_{rr-h1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{r1r-h} & \cdot & c_{rr-hr-h} \end{vmatrix} = 0 .$$

dann können wir aber immer eine infinitesimale Transformation $\sum_1^{r-h} {}^i\, \alpha_i X_i f$ derart bestimmen, dass sich

$$\left(X_r, \sum_1^{r-h} {}^i\, \alpha_i X_i f\right) \quad \text{aus} \quad X_{r-h+1} f \,\ldots\ldots\, X_r f$$

linear ableiten lässt. Denn setzen wir

$$\left(X_r, \sum_1^{r-h} {}^i\, \alpha_i X_i f\right) = \sum_1^{j} {}^j\, \lambda_j X_{r-h+j} f ,$$

dann müssen die α den Gleichungen genügen

$$\sum_1^{r-h} {}^i\, c_{ris} \alpha_i = 0 \quad s = 1 \cdots r-h , \quad \sum_1^{r-h} {}^i\, \alpha_i c_{rir-h+j} = \lambda_j \quad j = 1 \cdots h .$$

Die Determinante der $(r-h)$ ersten Gleichungen ist aber Null (Formel 22), mithin sind die Gleichungen durch von Null verschiedne Werte der α zu befriedigen, dann sind aber durch die letzten h Gleichungen die λ bestimmt.

Die auf diese Weise gefundne infinitesimale Transformation $\sum_1^{r-h} {}^i\, \alpha_i X_i f$ nennen wir $X_{r-h} f$; nach dem Vorgange von Killing wollen wir eine lineare, homogene Funktion im Folgenden dadurch bezeichnen, dass wir deren Veränderliche in eckige Klammern einschliessen; dann ist

$$(X_r X_{r-h}) = [X_{r-h+1} \cdots X_r] .$$

Wählen wir $X_{r-h} f$ in der angegebenen Weise, so verschwinden alle Constanten $c_{rr-h1}, c_{rr-h2}, \ldots c_{rr-hr-h}$, mithin ist die Gleichung (21) weiter zerlegbar in

$$\omega^{h+1}\begin{vmatrix} c_{r11}-\omega & \cdot & c_{rr-h-11} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{r1r-h-1} & \cdot & c_{rr-h-1r-h-1}-\omega \end{vmatrix} = 0\,,$$

und wenn $m > h+1$, so folgt wieder, dass der Faktor von ω^{h+1} für $\omega = 0$ verschwinden muss:

$$\begin{vmatrix} c_{r11} & \cdot & c_{rr-h-11} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{r1r-h-1} & \cdot & c_{rr-h-1r-h-1} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Dann können wir aber wieder eine infinitesimale Transformation $\sum_1^{r-h-1}{}^{i}\,\beta_i X_i f$ so bestimmen, dass

$$\left(X_r,\ \sum_1^{r-h-1}{}^{i}\,\beta_i X_i f\right) = [X_{r-h},\ X_{r-h+1},\cdots X_r]$$

und bezeichnen dieselbe als $X_{r-h-1}f$, also

$$(X_r X_{r-h-1}) = [X_{r-h}\cdots\cdot X_r].$$

Ist nun die Zahl m der verschwindenden Wurzeln ω grösser als $h+2$, so verschwinden noch weitere Unterdeterminanten von $|c_{rkj}|$, und es lassen sich infolgedessen noch weitere infinitesimale Transformationen $X_{r-h-2}f$, $X_{r-h-3}f\ldots.$ bis $X_{r-m+1}f$ so wählen, dass

$$\begin{aligned} (X_r X_{r-h-2}) &= [X_{r-h-1}\cdots\cdot X_r] \\ (X_r X_{r-h-3}) &= [X_{r-h-2}\cdots\cdot X_r] \\ &\cdot \qquad \cdot \\ (X_r X_{r-m+1}) &= [X_{r-m+2}\cdots\cdot X_r]\,. \end{aligned}$$

Dabei ist noch zu bemerken, dass in der Matrix

$$\begin{vmatrix} c_{rr-m+1\,r-m+2} & \cdot & \cdot & c_{rr-m+1\,r} \\ 0 & c_{rr-m+2r-m+3} & \cdot & c_{rr-m+2\,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & c_{rr-h\,r} \end{vmatrix}$$

nicht alle $(m-h)$-reihigen Determinanten verschwinden dürfen; wäre dies nämlich der Fall, so würden sich aus den infinitesimalen Transformationen $(X_r X_{r-h})\ldots..(X_r X_{r-m+1})$ eine oder mehrere infinitesimale Transformationen linear ableiten lassen, welche mit $X_r f$ vertauschbar wären; wir haben aber oben gesehen, dass die Gruppe keine weiteren mit $X_r f$ vertauschbaren infinitesimalen Transformationen enthalten kann, als die von uns mit $X_r f\ldots..X_{r-h+1}f$ bezeichneten.

Da die charakteristische Gleichung nur m verschwindende Wurzeln ω besitzen soll, so muss die $(r-m)$-reihige Unterdeterminante

$$(23) \qquad \begin{vmatrix} c_{r11} & \cdot & c_{rr-m\,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{r1r-m} & \cdot & c_{rr-m\,r-m} \end{vmatrix}$$

verschieden von Null sein.

Zunächst sind nun die Relationen

$$(X_r X_\mu)$$

näher zu bestimmen, wo μ eine der Zahlen $1 \ldots . r-m$.

Diese Relationen haben die Form

$$(X_r X_\mu) = \sum_1^{r-m} {}^j c_{r\mu j} X_j + \sum_1^m {}^k c_{r\mu r-m+k} X_{r-m+k} \,.$$

Setzen wir hierin

$$X_{r-m+k}' = X_{r-m+k} \quad k = 1 \cdots\cdots m$$
$$X_\mu' = X_\mu - \varrho_\mu X_{r-m+1}\,, \quad \mu = 1 \cdots\cdots r-m\,,$$

so wird

$$(X_r' X_\mu') = (X_r X_\mu) - \varrho_\mu [X_{r-m+2} \cdots\cdot X_r]$$
$$= \sum_1^{r-m} {}^j c_{r\mu j} X_j + \sum_1^m {}^k c_{r\mu r-m+k} X_{r-m+k} - \varrho_\mu [X_{r-m+2} \cdots X_r]$$
$$= \sum_1^{r-m} {}^j c_{r\mu j} (X_j' - \varrho_j X_{r-m+1}') + \sum_1^m {}^k c_{r\mu r-m+k} X_{r-m+k}' - \varrho_\mu [X_{r-m+2}' \cdots\cdot X_r']$$
$$= \sum_1^{r-m} {}^j c_{r\mu j} X_j' + (c_{r\mu r-m+1} - \sum_1^{r-m} {}^j c_{r\mu j} \varrho_j) X_{r-m+1}' + [X_{r-m+2}' \cdots X_r'] \,.$$

Damit $(X_r' X_\mu')$ von X_{r-m+1}' frei werde, ist nur nötig, die $\varrho_1 \cdots \varrho_{r-m}$ so zu bestimmen, dass die $(r-m)$ Gleichungen

$$\sum_1^{r-m} {}^j c_{r\mu j} \varrho_j = c_{r\mu r-m+1} \quad \mu = 1 \cdots r-m$$

erfüllt sind; dies ist immer möglich, da die Determinante $| c_{r\mu j} |$, wie wir oben gesehen haben (Formel 23), von Null verschieden ist.

Setzen wir dann weiter

$$X_{r-m+k}'' = X_{r-m+k}' \qquad k = 1 \cdots m\,,$$
$$X_\mu'' = X_\mu' - \sigma_\mu X_{r-m+2}' \qquad \mu = 1 \cdots r-m\,,$$

so können wir $\sigma_1 \cdots \sigma_{r-m}$ so wählen, dass $(X_r'' X_\mu'')$ frei von X_{r-m+2}'' wird, und so können wir fortfahren; bei geeigneter Wahl der Transformationen $X_1 f \cdots X_{r-m} f$ ergiebt sich also, dass $(X_r X_\mu)$ von $X_{r-m+1} \cdots X_r$ frei werden:

$$(24) \quad (X_r X_\mu) = [X_1 \cdots X_{r-m}] = \sum_1^{r-m} {}^\nu e_{\mu\nu} X_\nu \quad \mu = 1 \cdots r-m \,.$$

Hier ist die Determinante $| e_{\mu\nu} |$ sicher von Null verschieden, denn die $e_{\mu\nu}$ sind identisch mit den $c_{r\mu j}$ $(\mu, j = 1 \cdots r - m)$.

Wir werden jetzt beweisen, dass die infinitesimalen Transformationen $X_r, X_{r-1} \cdots X_{r-m+1}$ eine *m-gliedrige Gruppe* erzeugen. Zu diesem Zwecke bilden wir die Jacobische Identität $(X_r X_{r-h+\pi} X_{r-h+\varrho})$, wo π und ϱ irgend welche Zahlen von 1 bis h bedeuten sollen; wir erhalten

$$(X_r (X_{r-h+\pi} X_{r-h+\varrho})) \equiv 0 ,$$

daraus folgt, dass

$$(25) \qquad (X_{r-h+\pi} X_{r-h+\varrho}) = [X_{r-h+1} \cdots X_r] , \quad \pi , \varrho = 1 \cdots h .$$

Ferner ist

$$(X_r X_{r-h+\pi} X_\mu) \equiv ((X_{r-h+\pi} X_\mu) X_r) + ((X_\mu X_r) X_{r-h+\pi}) \equiv 0$$
$$\mu = 1 \cdots r - m ,$$

also

$$(26) \qquad (X_r (X_{r-h+\pi} X_\mu)) \equiv \sum_1^{r-m} {}^\nu e_{\mu\nu} (X_{r-h+\pi} X_\nu) .$$

Es sei nun ganz allgemein

$$(27) \qquad (X_{r-h+\pi} X_\mu) = \sum_1^r {}^s \alpha_{\mu s} X_s = \sum_1^{r-m} {}^i \alpha_{\mu i} X_i + \sum_1^m {}^k \alpha_{\mu r-m+k} X_{r-m+k} .$$

Dann ist $(X_r (X_{r-h+\pi} X_\mu))$ sicher von X_{r-m+1} frei, mithin kann auch auf der rechten Seite der Identität (26) ein Glied mit X_{r-m+1} nicht vorkommen. Setzen wir nun den Ausdruck (27) für $(X_{r-h+\pi} X_\mu)$ in die rechte Seite der Identität (26) ein, so ist

$$(X_r (X_{r-h+\pi} X_\mu)) \equiv \sum_1^{r-m} {}^\nu e_{\mu\nu} \left(\sum_1^{r-m} {}^i \alpha_{\nu i} X_i + \sum_1^m {}^k \alpha_{\nu r-m+k} X_{r-m+k} \right) ,$$

und da das Glied mit X_{r-m+1} verschwinden muss, so muss

$$\sum_1^{r-m} {}^\nu e_{\mu\nu} \alpha_{\nu r-m+1} = 0$$

sein. μ ist von 1 bis $r - m$ zu nehmen; wir haben also $r - m$ Gleichungen, die in den $r - m$ Grössen $\alpha_{1 r-m+1} \cdots \alpha_{r-m\, r-m+1}$ linear und homogen sind, überdies ist die Determinante $| e_{\mu\nu} |$ dieser Gleichungen von Null verschieden, also ist nötig, dass

$$\alpha_{1 r-m+1} = \alpha_{2 r-m+1} = \cdots = \alpha_{r-m r-m+1} = 0$$

sind, d. h. $(X_{r-h+\pi}, X_\mu)$ ist frei von X_{r-m+1}.

Ist dies aber der Fall, denn tritt in der linken Seite der Identität (26), da X_r auch X_{r-m+2} nicht reproduziert, auch X_{r-m+2} nicht auf, und es müssen demzufolge rechts alle $\alpha_{1 r-m+2}, \alpha_{2 r-m+2}, \cdots \alpha_{r-m r-m+2}$ identisch Null sein, d. h. $(X_{r-h+\pi} X_\mu)$ ist frei von X_{r-m+2};

dann ist aber wieder die linke Seite frei von X_{r-m+2}, und so fort; wir erkennen, dass $(X_{r-h+\pi} X_\mu)$ frei von $X_{r-m+1} \cdots X_{r-h}$ ist; ebensowenig können aber Glieder mit $X_{r-h+1} \cdots X_r$ auftreten, denn diese Transformationen sind sämtlich mit X_r vertauschbar, die linke Seite der Identität (26) ist also von denselben frei, mithin müssen auch rechts alle $\alpha_{\nu r-h+\pi}$ $(\nu = 1 \cdots r-m,\ \pi = 1 \cdots h)$ verschwinden und wir erhalten schliesslich

(28) $(X_{r-h+\pi},\ X_\mu) = [X_1 \cdots X_{r-m}],\quad \pi = 1 \cdots h,\ \mu = 1 \cdots r-m.$

Weiter giebt die Jacobische Identität zwischen X_r, $X_{r-h+\pi}$, X_{r-h}:

$$(X_r (X_{r-h+\pi} X_{r-h})) \equiv ([X_{r-h+1} \cdots X_r] X_{r-h+\pi}),$$

also nach (25):

$$(X_r (X_{r-h+\pi} X_{r-h})) \equiv [X_{r-h+1} \cdots X_r],$$

mithin kann $(X_{r-h+\pi} X_{r-h})$ sicher kein Glied mit $X_1 \cdots X_{r-m}$ enthalten:

$$(X_{r-h+\pi} X_{r-h}) = [X_{r-m+1} \cdots X_r].$$

Ebenso giebt

$$(X_r X_{r-h+\pi} X_{r-h-1}) \equiv ((X_{r-h+\pi} X_{r-h-1}) X_r) + ([X_{r-h} \cdots X_r] X_{r-h+\pi}) \equiv 0$$

also

$$(X_r (X_{r-h+\pi} X_{r-h-1})) \equiv \text{Const.}\ (X_{r-h}, X_{r-h+\pi}) + [X_{r-h+1} \cdots X_r]$$
$$\equiv [X_{r-m+1} \cdots X_r],$$

daraus folgt, dass $(X_{r-h+\pi} X_{r-h-1})$ ebenfalls nur von $X_{r-m+1} \cdots X_r$ abhängen kann: $(X_{r-h+\pi} X_{r-h-1}) = [X_{r-m+1} \cdots X_r]$. Bilden wir der Reihe nach $(X_r X_{r-h+\pi} X_{r-h-2})$, $(X_r X_{r-h+\pi} X_{r-h-3})$, $\cdots$ $(X_r X_{r-h+\pi} X_{r-m+1})$, so finden wir ebenso, dass $(X_{r-h+\pi} X_{r-h-2})$, $(X_{r-h+\pi} X_{r-h-3})$, $\cdots$ $(X_{r-h+\pi} X_{r-m+1})$ nur von $X_{r-m+1} \cdots X_r$ abhängen können, also

(29) $$(X_{r-h+\pi}, X_{r-m+\sigma}) = [X_{r-m+1} \cdots X_r],$$
$$r = 1 \cdots h \quad \sigma = 1 \cdots m-h.$$

Es erübrigt nun noch, die Relationen

$$(X_{r-m+\sigma},\ X_{r-m+\tau}),\quad \sigma, \tau = 1 \cdots m-h$$

näher zu bestimmen.

Zunächst folgt aus $(X_r X_{r-h} X_{r-h-1})$:

$$([X_{r-h+1} \cdots X_r] X_{r-h-1}) + ((X_{r-h} X_{r-h-1}) X_r) + ([X_{r-h} \cdots X_r] X_{r-h}) \equiv 0$$

oder

$$[X_{r-m+1} \cdots X_r] + ((X_{r-h} X_{r-h-1}) X_r) + [X_{r-m+1} \cdots X_r] \equiv 0,$$

also

$$(X_r (X_{r-h} X_{r-h-1})) \equiv [X_{r-m+1} \cdots X_r]$$

und damit

$$(X_{r-h} X_{r-h-1}) = [X_{r-m+1} \cdots X_r].$$

Weiter ist

$$(X_r X_{r-h} X_{r-h-2}) \equiv [X_{r-m+1} \cdots X_r] + ((X_{r-h} X_{r-h-2}) X_r) + [X_{r-m+1} \cdots X_r] \equiv 0$$

also

$$(X_r (X_{r-h} X_{r-h-2})) \equiv [X_{r-m+1} \cdots X_r]$$

und deshalb auch

$$(X_{r-h} X_{r-h-2}) = [X_{r-m+1} \cdots X_r] \, .$$

Nun bilden wir

$$\begin{aligned}(X_r X_{r-h-1} X_{r-h-2}) &\equiv ([X_{r-h} \cdots X_r] X_{r-h-2}) + ((X_{r-h-1} X_{r-h-2}) X_r) \\ &\quad + ([X_{r-h-1} \cdots X_r] X_{r-h-1}) \equiv 0 \\ &\equiv [X_{r-m+1} \cdots X_r] + ((X_{r-h-1} X_{r-h-2}) X_r) \\ &\quad + [X_{r-m+1} \cdots X_r] \equiv 0\end{aligned}$$

also ist auch

$$(X_r (X_{r-h-1} X_{r-h-2})) \equiv [X_{r-m+1} \cdots X_r]$$

und damit

$$(X_{r-h-1} X_{r-h-2}) = [X_{r-m+1} \cdots X_r] \, .$$

So fahren wir fort. $(X_r X_{r-h-1} X_{r-h-3})$ giebt

$$[X_{r-m+1} \cdots X_r] + ((X_{r-h-1} X_{r-h-3}) X_r) + ([X_{r-h-2} \cdots X_r] X_{r-h-1}) \equiv 0$$

und daraus folgt mit Benutzung der früher gefundenen Formeln

$$(X_r (X_{r-h-1} X_{r-h-3})) \equiv [X_{r-m+1} \cdots\cdot X_r] \, ;$$

also ist auch

$$(X_{r-h-1} X_{r-h-3}) = [X_{r-m+1} \cdots\cdot X_r] \, .$$

Vermittelst dieser Formeln finden wir aber aus $(X_r X_{r-h-2} X_{r-h-3})$, dass

$$(X_{r-h-2} X_{r-h-3}) = [X_{r-m+1} \cdots\cdot X_r] \, ,$$

ebenso giebt $(X_r X_{r-h-1} X_{r-h-4})$:

$$(X_{r-h-1} X_{r-h-4}) = [X_{r-m+1} \cdots\cdot X_r] \, ,$$

und damit erhalten wir der Reihe nach

$$(30) \qquad \begin{aligned}(X_{r-h-2} X_{r-h-4}) &= [X_{r-m+1} \cdots\cdot X_r] \\ (X_{r-h-3} X_{r-h-4}) &= [X_{r-m+1} \cdots\cdot X_r]\end{aligned}$$

und so fort; es gilt allgemein

$$(X_{r-m+\sigma}, \; X_{r-m+\tau}) = [X_{r-m+1} \cdots\cdot X_r]$$
$$\sigma, \tau = 1 \cdots\cdot m - h .$$

Die Formeln (25), (29) und (30) zeigen, dass die infinitesimalen Transformationen $X_{r-m+1}, \ldots . X_r$ eine Untergruppe der r-gliedrigen Gruppe bestimmen; aus der Weise, wie wir die Transformationen $X_{r-m+1} \ldots . X_r$ gefunden haben, geht ohne Weiteres hervor, dass dieselben von einander unabhängig sind, dass sie also eine *m-gliedrige* Untergruppe erzeugen; es gilt somit der Satz:

Satz 8[1]. *Hat für irgend ein Wertsystem $e_1 \dots . e_r$ die charakteristische Gleichung m verschwindende Wurzeln ω, so gehört*

$$\sum_1^r{}^k e_k X_k f$$

einer m-gliedrigen Untergruppe an, in der die zu $\sum^k e_k X_k f$ gehörige charakteristische Gleichung m verschwindende Wurzeln besitzt.

Eine bemerkenswerte Eigenschaft dieser Untergruppe X_{r-m+1}, $\dots . X_r$ geht aus der Jacobischen Identität $(X_r X_{r-m+\sigma} X_\alpha)$ hervor, wo $\sigma = 1 \dots . m - h$, $\alpha = 1 \dots . r - m$ zu setzen ist.

Zunächst giebt

$$\begin{aligned}(X_r X_{r-h} X_\alpha) \equiv ([X_{r-h+1} \cdots X_r] X_\alpha) + ((X_{r-h} X_\alpha) X_r) \\ + ([X_1 \cdots X_{r-m}] X_{r-h}) = 0;\end{aligned}$$

nach (24) und (28) folgt daraus

$$(X_r (X_{r-h} X_\alpha)) \equiv [X_1 \cdots X_{r-m}] + \sum_1^{r-m}{}^\beta e_{\alpha\beta} (X_\beta X_{r-h}).$$

Analoge Betrachtungen, wie sie oben angestellt wurden, führen zu dem Ergebnis, dass $(X_{r-h} X_\alpha)$ frei sein muss von X_{r-m+1}, X_{r-m+2}, $\dots X_r$:

$$(X_{r-h} X_\alpha) = [X_1 \dots X_{r-m}].$$

Ebenso finden wir aus $(X_r X_{r-h-1} X_\alpha)$, dass

$$(X_{r-h-1} X_\alpha) = [X_1 \dots X_{r-m}]$$

und weiter durch successive Anwendung der Jacobischen Identität

$$(X_{r-m+\varrho}, X_\alpha) = [X_1 \dots X_{r-m}]; \quad \varrho = 1 \dots m - h,$$

und wenn wir dazu noch die Formel (28) hinzufügen, so ist allgemein

$$(31) \quad (X_{r-m+\sigma}, X_\alpha) = [X_1 \dots X_{r-m}] \quad \sigma = 1 \dots m, \quad \alpha = 1 \dots r - m;$$

es gilt sonach der Satz:

Satz 9. *Die Untergruppe $X_{r-m+1} \dots X_r$ lässt die Schar der infinitesimalen Transformationen*

$$e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + \cdots + e_{r-m} X_{r-m} f$$

invariant.

Nunmehr wollen wir voraussetzen, dass $\sum_1^r{}^k e_k X_k f$ eine infinitesimale Transformation von allgemeiner Lage ist.

Wir bilden zu einer beliebigen infinitesimalen Transformation

$$\sum_1^m{}^\mu e_{-rm+\mu} X_{r-m+\mu} f$$

1) Vgl. Killing, Z. v. Gr. II. S. 7.

der m-gliedrigen Untergruppe die charakteristische Gleichung. Aus den Formeln (25), (29), (30) und (31) geht hervor, dass alle

$$c_{r-m+\mu,\,k,\,j} = 0 \quad \mu = 1 \cdots m$$
$$\text{für} \quad k = r - m + 1, \cdots r, \quad j = 1, \cdots r - m$$

und andrerseits für

$$k = 1 \cdots r - m, \quad j = r - m + 1, \cdots r,$$

mithin zerlegt sich die charakteristische Gleichung in das Produkt

$$\varDelta_1 \cdot \varDelta_2 = 0,$$

wo

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} \sum\limits_1^m{}^{\mu}\, e_{r-m+\mu} c_{r-m+\mu,\,1,\,1} - \omega & \cdot & \sum\limits_1^m{}^{\mu}\, e_{r-m+\mu} c_{r-m+\mu,\,r-m,\,1} \\ \sum\limits_1^m{}^{\mu}\, e_{r-m+\mu} c_{r-m+\mu,\,1,\,2} & \cdot & \sum\limits_1^m{}^{\mu}\, e_{r-m+\mu} c_{r-m+\mu,\,r-m,\,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum\limits_1^m{}^{\mu}\, c_{r-m+\mu} c_{r-m+\mu,\,1,\,r-m} & \cdot & \sum\limits_1^m{}^{\mu}\, e_{r-m+\mu} c_{r-m+\mu,\,r-m,\,r-m} - \omega \end{vmatrix}$$

und

$$\varDelta_2 = \begin{vmatrix} \sum\limits_1^m{}^{\mu}\, e_{r-m+\mu} c_{r-m+\mu,\,r-m+1,\,r-m+1} - \omega & \cdot & \sum\limits_1^m{}^{\mu}\, e_{r-m+\mu} c_{r-m+\mu,\,r,\,r-m+1} \\ \sum\limits_1^m{}^{\mu}\, e_{r-m+\mu} c_{r-m+\mu,\,r-m+1,\,r-m+2} & \cdot & \sum\limits_1^m{}^{\mu}\, e_{r-m+\mu} c_{r-m+\mu,\,r,\,r-m+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum\limits_1^m{}^{\mu}\, e_{r-m+\mu} c_{r-m+\mu,\,r-m+1,\,r} & \cdot & \sum\limits_1^m{}^{\mu}\, e_{r-m+\mu} c_{r-m+\mu,\,r,\,r} - \omega \end{vmatrix}.$$

Für

$$e_r = 1 \quad e_{r-1} = \cdots = e_{r-m+1} = 0 \quad \omega = 0$$

verschwindet der erste Faktor, $\varDelta_1$, *nicht*; also kann man eine reelle, positive Grösse ϱ so wählen, dass für alle Werte $e_r \ldots e_{r-m+1}$, die den Bedingungen genügen

$$|e_r - 1| < \varrho \quad |e_{r-1}| < \varrho, \cdots |e_{r-m+1}| < \varrho, \quad \omega = 0,$$

$\varDelta_1$ niemals verschwindet; also muss der zweite Faktor $\varDelta_2$ $\omega = 0$ zur m-fachen Wurzel haben, und zwar bei beliebigen Werten $e_r, \ldots e_{r-m+1}$, daraus folgt, dass die Gruppe $X_{r-m+1}, \ldots X_r$ den *Rang Null* hat; es gilt also der Satz:

Satz 10. *Verschwinden die Coefficienten* $\psi_{r-1}(e) \ldots \psi_{r-m+1}(e)$ *in der charakteristischen Gleichung* (4) *identisch, während* $\psi_{r-m}(e)$ *nicht identisch verschwindet, so gehört jede infinitesimale Transformation von allgemeiner Lage einer m-gliedrigen Untergruppe vom Range Null an.*

Der vorstehende Beweis ist eine genauere Ausführung der von Killing S. 7 u. 8 seiner 2. Abhandlung gegebenen Entwickelungen (Math. Ann. Bd. 33, 1889).

II. Abschnitt.

Über die Gruppen vom Range Null.

A. Allgemeines.

§ 4.

Einige Bemerkungen über den Isomorphismus zweier Gruppen.

Es möge gestattet sein, zunächst einen wichtigen Satz aus der Theorie der Transformationsgruppen zu wiederholen, und zwar über den Isomorphismus zweier Gruppen[1]).

Sind $X_1f \dots X_mf\ Y_1f \dots Y_lf\ m+l$ unabhängige infinitesimale Transformationen einer $(m+l)$-gliedrigen Gruppe, G_{m+l}, und erzeugen $X_1f \dots X_mf$ eine invariante m-gliedrige Untergruppe G_m der G_{m+l}, dann bestehen Relationen von der Form

$$(X_i X_k) = \sum_1^m {}^s\, \alpha_{iks} X_s f \quad i, k = 1 \cdots m,$$

$$(X_i Y_k) = \sum_1^m {}^s\, \beta_{iks} X_s f \quad i = 1 \cdots m,\ k = 1 \cdots l,$$

$$(Y_i Y_k) = \sum_1^m {}^s\, \gamma_{iks} X_s f + \sum_1^l {}^\tau\, \delta_{ik\tau} Y_\tau f.$$

Die Jacobische Identität zwischen irgend drei infinitesimalen Transformationen Y_i, Y_k, Y_j liefert

$$(Y_i Y_k Y_j) \equiv [X_1 \cdots X_m] + \sum_{\tau\pi}^{1 \dots l} (\delta_{ik\tau}\delta_{\tau j\pi} + \delta_{kj\tau}\delta_{\tau i\pi} + \delta_{ji\tau}\delta_{\tau k\pi}) Y_\pi \equiv 0,$$

wo wieder die Einschliessung in eckige Klammern eine lineare, homogene Funktion der in der Klammer enthaltenen Argumente bedeuten soll.

In dieser Identität müssen natürlich die Coefficienten der Y_π für sich verschwinden, die $\delta_{ik\tau}$ müssen also in den Beziehungen stehen

$$(1) \quad \begin{cases} \sum_1^l {}^\tau (\delta_{ik\tau}\delta_{\tau j\pi} + \delta_{kj\tau}\delta_{\tau i\pi} + \delta_{ji\tau}\delta_{\tau k\pi}) = 0 \quad \pi = 1 \cdots l. \\ \text{Ausserdem erfüllen die } \delta_{ik\tau} \text{ noch die } l \text{ Gleichungen} \\ \qquad \delta_{ik\tau} + \delta_{ki\tau} = 0 \quad \tau = 1 \cdots l. \end{cases}$$

Nach einem Fundamentalsatze in der Theorie der Transforma-

1) Näheres siehe Lie, Transformationsgruppen, I, Kap. 17.

tionsgruppen erzeugen aber l unabhängige infinitesimale Transformationen $\mathfrak{Y}_1 \dots \mathfrak{Y}_l$, welche die Relationen erfüllen

$$(\mathfrak{Y}_i \mathfrak{Y}_k) = \sum_1^l {}_\tau \, \delta_{ik\tau} \mathfrak{Y}_\tau ,$$

eine l-gliedrige Gruppe, und andrerseits bestimmt jedes System von Constanten $\delta_{ik\tau}$ $(i, k, \tau = 1 \dots l)$, das den Gleichungen (1) genügt, die Zusammensetzung einer gewissen l-gliedrigen Gruppe; daraus erkennen wir, dass, wenn wir in unsrer $G_{m+l}: X_1 \dots X_m f,\ Y_1 f \dots Y_l f$ alle $Xf \equiv 0$ setzen, die Schar der Yf eine l-gliedrige Gruppe bestimmt, und diese G_l der Yf ist *isomorph* mit der G_{m+l}.

Jede r-gliedrige Gruppe, welche eine q-gliedrige invariante Untergruppe enthält, liefert also eine *$(r-q)$-gliedrige isomorphe Gruppe*, sobald wir alle Transformationen der invarianten G_q identisch Null setzen.

Nehmen wir nun an, es sei $X_1 f \dots X_m f\ X_{m+1} f \dots X_r f$ eine r-gliedrige Gruppe vom Range Null, und in ihr sei $X_1 f \dots X_m f$ eine *invariante m-gliedrige Untergruppe*.

Dann sind alle $c_{ikm+\varrho} = 0$ für $i = 1 \dots m$, $k = 1 \dots r$ $\varrho = 1 \dots r - m$; setzen wir noch zur Abkürzung

$$\sum_{m+1}^r {}_i \, e_i c_{ikj} \equiv \varphi_{kj}, \quad k, j = 1 \cdots r,$$

so hat die charakteristische Gleichung für eine infinitesimale Transformation

$$e_{m+1} X_1 f + \cdots + e_r X_r f$$

die folgende Form:

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11} - \omega & \cdot & \varphi_{m1} & \varphi_{m+1,1} & \cdot & \varphi_{r1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{1m} & \cdot & \varphi_{mm} - \omega & \varphi_{m+1m} & \cdot & \varphi_{rm} \\ 0 & \cdot & 0 & \varphi_{m+1m+1} - \omega & \cdot & \varphi_{rm+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & \varphi_{m+1r} & \cdot & \varphi_{rr} - \omega \end{vmatrix} = 0$$

Diese Gleichung muss lauter verschwindende Wurzeln ω haben; sie zerlegt sich in 2 Faktoren, von denen der zweite

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \varphi_{m+1m+1} - \omega & \cdot & \varphi_{rm+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{m+1r} & \cdot & \varphi_{rr} - \omega \end{vmatrix}$$

die charakteristische Determinante *der* Gruppe darstellt, die wir erhalten, wenn wir in der gegebenen r-gliedrigen Gruppe alle Transformationen der invarianten m-gliedrigen Untergruppe $X_1 f \dots X_m f$ identisch Null setzen; diese Gruppe ist nach dem Vorhergehenden

eine $(r - m)$-gliedrige isomorphe Gruppe; da nun die charakteristische Gleichung der G_r keine von Null verschiednen Wurzeln ω enthält, so muss auch der 2. Faktor derselben, (2), gleich Null gesetzt, lauter verschwindende Wurzeln ω besitzen, mit andern Worten, die charakteristische Gleichung der isomorphen Gruppe $X_{m+1}f \ldots X_r f$ enthält lauter verschwindende Wurzeln ω, mithin hat die isomorphe Gruppe den Rang Null; es gilt somit der Satz:

Satz 11. *Ist eine $(r - q)$-gliedrige Gruppe mit einer r-gliedrigen Gruppe vom Range Null isomorph, so hat sie selbst den Rang Null*[1].

Dieser Satz ist für die Bestimmung der Zusammensetzung der Gruppen vom Range Null von fundamentaler Bedeutung.

Es wird im folgenden Paragraphen gezeigt werden, dass jede r-gliedrige Gruppe vom Range Null gewisse invariante Untergruppen enthält; dann kann man aber ohne weiteres die Zusammensetzungen gewisser isomorpher Gruppen bestimmen, die nach Satz 11 ebenfalls den Rang Null haben, und somit bietet sich in dem Satze 11 ein bedeutsames Hilfsmittel für die Bestimmung aller Zusammensetzungen der Gruppen vom Range Null dar.

§ 5.

Allgemeine Formel für die Zusammensetzung der Gruppen vom Range Null.

Die Gruppen vom Range Null sind dadurch definiert, dass bei ihnen die charakteristische Gleichung $\Delta = 0$ für jedes Wertsystem $e_1 \ldots e_r$ lauter verschwindende Wurzeln besitzt. *Die Gruppen vom Range Null enthalten also keine 2-gliedrigen Untergruppen mit nicht vertauschbaren Transformationen.*

Es soll im Folgenden zunächst bewiesen werden, dass die Gruppen vom Range Null zu einer besonderen, von Lie zuerst im III. Bande seines norwegischen Archivs S. 112 ff. betrachteten Klasse[2]) von Gruppen gehören, nämlich zu den Gruppen, bei welchen die Relationen

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_s \, c_{iks} X_s f$$

die besondere Form annehmen

$$(3) \quad (X_i X_{i+k}) = \sum_1^{i+k-1} {}_s \, c_{ii+ks} X_s f, \quad i = 1 \cdots r-1 \quad k = 1 \cdots r-i.$$

Um den Beweis hierfür durchzuführen, benutzen wir die folgenden Hilfssätze:

1) Satz von Engel.

2) Vergl. auch Lie, Transformationsgruppen I, S. 588 ff.

Hilfssatz I. *Enthält eine $(r+m)$-gliedrige Gruppe $X_1 f \dots X_{r+m} f$ eine r-gliedrige Untergruppe $X_1 f \dots X_r f$ von der Zusammensetzung*

$$(X_i X_{i+k}) = \sum_{1}^{i+k-1} {}_s\, c_{ii+ks} X_s f \quad i = 1 \cdots r-1\,, \quad k = 1 \cdots r-i\,,$$

so enthält sie auch eine $(r+1)$-gliedrige Untergruppe, der die Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ angehört.

Dieser Satz ist von Lie aufgestellt und bewiesen worden[1]).

Hilfssatz II. *Enthält eine G_r vom Range Null eine G_{r-1}, so enthält sie stets auch eine* i n v a r i a n t e *G_{r-1}.*

Beweis[2]). Enthält eine G_r eine nicht invariante G_{r-1}, so enthält sie zugleich ∞^1 verschiedne $(r-1)$-gliedrige Untergruppen, nämlich diejenigen, welche innerhalb der G_r mit der betreffenden G_{r-1} gleichberechtigt sind[3]). Deuten wir die ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen der G_r als Punkte eines $(r-1)$-fach ausgedehnten Raumes R_{r-1}, so werden die ∞^1 $(r-1)$-gliedrigen Untergruppen durch eine Schar von ∞^1 $(r-2)$-fach ausgedehnten, ebenen Mannigfaltigkeiten M_{r-2} dargestellt.

Die Punkte des Raumes R_{r-1} denken wir uns jetzt durch die adjungierte Gruppe der G_r transformiert. Dabei wird jede der ∞^1 M_{r-2} in eine andere M_{r-2} der Schar übergeführt, der Inbegriff dieser ∞^1 Mannigfaltigkeiten also durch eine Gruppe transformiert, welche mit der G_r isomorph ist, denn nach den Ausführungen in § 1 dieser Untersuchungen ist die adjungierte Gruppe einer G_r mit der ursprünglichen Gruppe isomorph; dann hat aber die den Inbegriff der ∞^1 M_{r-2} transformierende Gruppe den Rang Null; daraus folgt aber, dass diese Gruppe eingliedrig ist.

Denn eine Schar von ∞^1 Elementen kann höchstens dreigliedrig transformiert werden; alle 3-gliedrigen Gruppen aber, die ∞^1 Elemente transformieren, sind ähnlich mit der allgemeinen projektiven Gruppe der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit; diese Gruppe enthält aber 2-gliedrige Untergruppen mit nicht vertauschbaren Transformationen, also kann sie keiner Gruppe vom Range Null ähnlich sein. Ferner giebt es aber auch keine, eine Schar von ∞^1 Elementen transformierende 2-gliedrige Gruppe mit lauter vertauschbaren Transformationen; also muss unsre fragliche Gruppe eingliedrig sein.

Darnach ist die G_r mit einer eingliedrigen Gruppe isomorph, folglich enthält sie sicher eine invariante $(r-1)$-gliedrige Untergruppe, sobald wir voraussetzen, dass sie überhaupt eine $(r-1)$-gliedrige Untergruppe enthält; damit ist Hilfssatz II bewiesen.

---

1) Lie, Trfgr. I, S. 596 f.

2) Vergl. Engel, Leipziger Berichte 1887, S. 97.

3) Lie, Trfgr. I, Kap. 23, § 113.

Nunmehr ist auch ohne Schwierigkeit zu erkennen, dass die Gruppen vom Range Null die Zusammensetzung (3) haben.

Dies gilt zunächst für $r = 2$, wo ja im Besonderen

$$(X_1 X_2) = 0$$

ist; eine G_r vom Range Null enthält also ∞^1 invariante eingliedrige Untergruppen.

Ferner gilt unsre Behauptung für $r = 3$. Denn jede 3-gliedrige Gruppe enthält 2-gliedrige Untergruppen, nach Hilfssatz II also jede 3-gliedrige Gruppe vom Range Null eine invariante 2-gliedrige Gruppe, deren Transformationen vertauschbar sein müssen; also besitzen auch die 3-gliedrigen Gruppen vom Range Null die Zusammensetzung (3).

Können wir nun beweisen, dass unsre Behauptung auch für $r = q + 1$ gilt, sobald sie für alle $r \leqq q$ richtig ist, so gilt dieselbe für jedes beliebige r.

Wir nehmen also an, wir hätten bewiesen, dass jede Gruppe vom Range Null mit $r \leqq q$ Parametern die Zusammensetzung (3) besitze.

Dann geht aus Hilfssatz I hervor, dass eine G_{q+1} vom Range Null, welche eine h-gliedrige Untergruppe G_h enthält, stets auch zugleich eine $(h + 1)$-gliedrige Untergruppe besitzt, in welcher die G_h enthalten ist. Darnach ist insbesondre jede 2-gliedrige Untergruppe der G_{q+1} in einer dreigliedrigen, jede 3-gliedrige Untergruppe in einer 4-gliedrigen enthalten und so fort; jede Gruppe, also auch eine G_{q+1} vom Range Null, enthält aber 2-gliedrige Untergruppen, mithin enthält jede G_{q+1} vom Range Null auch eine q-gliedrige Untergruppe und nach Hilfssatz II sogar eine invariante q-gliedrige Untergruppe, die natürlich auch den Rang Null besitzt; diese q-gliedrige Untergruppe hat nach Voraussetzung die Zusammensetzung (3), mithin hat auch die $(q + 1)$-gliedrige Gruppe diese Zusammensetzung.

Wir können also den Satz aussprechen:

Satz 12. *Jede r-gliedrige Gruppe vom Range Null enthält eine $(r - 1)$-gliedrige invariante Untergruppe.*

Es ist somit bewiesen, dass eine r-gliedrige Gruppe vom Range Null die Zusammensetzung (3) hat.

Lie hat nun ferner gezeigt, dass sich in jeder r-gliedrigen Gruppe von der Zusammensetzung (3) r unabhängige infinitesimale Transformationen $Y_1 f \ldots Y_r f$ so wählen lassen, dass die Gruppe die Zusammensetzung erhält

$$(3') \qquad (Y_i Y_{i+k}) = \sum_1^i {}_s \, c_{ii+ks}' \, Y_s f.$$

Diese Formeln erleiden für die Gruppen vom Range Null noch eine Modifikation.

Aus (3') würde speziell folgen

$$(Y_1 Y_{k+1}) = c_{1k+11}' Y_1 f ,$$

da aber eine Gruppe vom Range Null keine 2-gliedrigen Untergruppen mit nicht vertauschbaren Transformationen besitzt, so ergiebt sich notwendig, dass alle c_{1k+11}' verschwinden müssen. Daraus folgt:

Jede Gruppe vom Range Null enthält sicher eine ausgezeichnete infinitesimale Transformation, d. h. eine Transformation, welche mit allen Transformationen der Gruppe vertauschbar ist; wählen wir die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen der Gruppe so, dass die Relationen (3') bestehen, so ist $Y_1 f$ ausgezeichnet.

$Y_1 Y_2 Y_3$ ist eine dreigliedrige invariante Untergruppe der G_r vom Range Null; es bestehen die Relationen

$$(4) \quad (Y_1 Y_2) = 0 \quad (Y_1 Y_3) = 0 \quad (Y_2 Y_3) = c_{231} Y_1 + c_{232} Y_2 .$$

Setzen wir nun

$$Y_1' = Y_1 \quad Y_2' = c_{231} Y_1 + c_{232} Y_2 \quad Y_3' = Y_3 ,$$

so gehen die Relationen (4) über in

$$(Y_1' Y_2') = 0 \quad (Y_1' Y_3') = 0 \quad (Y_2' X_3') = c_{232} (Y_2 Y_3) = c_{232} Y_2' .$$

Wäre also $c_{232} \neq 0$, so würden $Y_2' Y_3'$ eine 2-gliedrige Untergruppe bilden, deren Transformationen nicht vertauschbar sind; also muss $c_{232} = 0$ sein und die 3-gliedrige Gruppe hat die Zusammensetzung

$$(Y_1 Y_2) = 0 \quad (Y_1 Y_3) = 0 \quad (Y_2 Y_3) = c_{231} Y_1 .$$

Ebenso werden wir finden, dass $c_{242} = c_{343} = 0$ sein muss. In der G_r bestimmen $Y_1 Y_2 Y_3 Y_4$ eine invariante 4-gliedrige Untergruppe, für welche die Relationen gelten

$$(Y_1 Y_k) = 0 \quad k = 1, \cdots 4 \quad (Y_2 Y_3) = c_{231} Y_1$$
$$(Y_2 Y_4) = c_{241} Y_1 + c_{242} Y_2$$
$$(Y_3 Y_4) = c_{341} Y_1 + c_{342} Y_2 + c_{343} Y_3 ;$$

wäre nun $c_{242} \neq 0$, dann könnten wir wieder eine Transformation

$$Y_2' = c_{241} Y_1 + c_{242} Y_2$$

wählen, so dass

$$(Y_2' Y_4) = c_{242} (Y_2 Y_4) = c_{242} Y_2' ,$$

also muss $c_{242} = 0$ sein.

Setzen wir ferner

$$Y_3' = \alpha Y_1 + \beta Y_2 + \gamma Y_3 ,$$

so wird

$$(Y_2 Y_3') = \gamma \cdot c_{231} Y_1 , \quad (Y_3' Y_4) = (\beta c_{241} + \gamma c_{341}) Y_1 + \gamma c_{342} Y_2 + \gamma c_{343} Y_3$$

und da

$$Y_3 = \frac{1}{\gamma} (Y_3' - \alpha Y_1 - \beta Y_2) ,$$

so wird

$$(Y_3' Y_4) = (\beta c_{241} + \gamma c_{341} - \alpha c_{343}) Y_1 + (\gamma c_{342} - \beta c_{343}) Y_2 + c_{343} Y_3';$$

wählen wir also α, β, γ so, dass

$$\beta c_{241} + \gamma c_{341} - \alpha c_{343} = 0 \,, \quad \gamma c_{342} - \beta c_{343} = 0 \,,$$

so würde

$$(Y_3' Y_4) = c_{343} Y_3'$$

werden, also muss auch $c_{343} = 0$ sein.

Ebenso können wir allgemein nachweisen, dass in jeder r-gliedrigen Gruppe vom Range Null alle

$$c_{2k+22} = 0 \quad k = 1 \cdots r-2 \,, \quad c_{3k+33} = 0 \quad k = 1 \cdots r-3 \,.$$

Wäre nämlich in

$$(Y_2 Y_{k+2}) = c_{2k+21} Y_1 + c_{2k+22} Y_2 \quad k = 1 \cdots r-2$$

$c_{2k+22} \neq 0$, dann setzen wir

$$Y_2' = c_{2k+21} Y_1 + c_{2k+22} Y_2 \,;$$

die übrigen Relationen bleiben im Wesentlichen unverändert und es würde

$$(Y_2' Y_{k+2}) = c_{2k+22} Y_2' \,,$$

also muss $c_{2k+22} = 0$ sein, $k = 1 \cdots r-2$.

Ebenso könnten wir, wenn $c_{3k+33} \neq 0$,

$$Y_3' = \alpha Y_1 + \beta Y_2 + \gamma Y_3$$

setzen und α, β, γ so bestimmen, dass

$$(Y_3' Y_{k+3}) = c_{3k+33} Y_3' \,,$$

es muss demnach auch jedes $c_{3k+33} = 0$ sein.

Wir haben jetzt für $i = 2$ und $i = 3$ bewiesen, dass

$$(Y_i Y_{i+k}) = \sum_1^{i-1} {}_s \, c_{ii+ks} Y_s f \,; \quad k = 1 \cdots r-i \,;$$

um diese Formel allgemein zu beweisen, haben wir nur zu zeigen, dass sie für $i = m+1$ gilt, sobald sie für $i \leqq m$ richtig ist.

Dies ergiebt sich sofort aus der Jacobischen Identität

$$(Y_m Y_{m+1} Y_{m+k+1}) .$$

$$(Y_m Y_{m+1} Y_{m+k+1}) \equiv ([Y_1 \cdots Y_{m-1}] Y_{m+k+1}) + ((Y_{m+1} Y_{m+k+1}) Y_m)$$
$$+ ([Y_1 \cdots Y_{m-1}] Y_{m+1}) \equiv 0 \,.$$

Nach Voraussetzung ist

$$([Y_1 \cdots Y_{m-1}] Y_{m+i}) = [Y_1 \cdots Y_{m-2}] \quad i = 1 \cdots r-m \,,$$

also folgt, dass

$$(Y_m (Y_{m+1} Y_{m+k+1})) \equiv [Y_1 \cdots Y_{m-2}] \,.$$

Die linke Seite dieser Identität darf also nur von $Y_1 \cdots Y_{m-2}$ abhängen, folglich darf $(Y_{m+1} Y_{m+k+1})$ nur $Y_1 \cdots Y_m$ enthalten, denn

enthielte es auch Y_{m+1}, so würde dieses mit Y_m kombiniert einen Ausdruck geben, der auch Y_{m-1} enthielte; es ist also

$$(Y_{m+1}\, Y_{m+k+1}) = \sum_1^m{}^s\, c_{m+1\; m+k+1\; s}\, Y_s f\,,$$

mithin gilt für die Gruppen vom Range Null allgemein die Formel

$$(5)\; (Y_i\, Y_{i+k}) = \sum_1^{i-1}{}^s\, c_{ii+ks}\, Y_s f \quad i = 1 \cdots r-1\,, \quad k = 1 \cdots r-i\,.$$

§ 6.

Die charakteristische Gleichung für die Gruppen vom Range Null.

Es wird sich für das Folgende empfehlen, in der Bezeichnungsweise der unabhängigen infinitesimalen Transformationen, durch welche wir die r-gliedrige Gruppe vom Range Null definieren, eine Aenderung eintreten zu lassen; und zwar wollen wir die r Transformationen $Y_1 f \cdots Y_r f$ der Reihe nach ersetzen durch $X_r f \cdots X_1 f$; dann nehmen die Relationen (5) folgende Form an:

$$(6)\quad \begin{cases} (X_i\, X_{i+k}) = \sum\limits_{i+k+1}^{r}{}^s\, c_{ii+ks}\, X_s f \\ i = 1 \cdots r-1\,, \quad k = 1 \cdots r-i\,. \end{cases}$$

Diese Darstellung (6) der Gruppen vom Range Null werden wir allen weiteren Betrachtungen zu Grunde legen, also für jede r-gliedrige Gruppe von vornherein annehmen, dass die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen, durch welche sie bestimmt wird, so gewählt sind, dass sie die Relationen (6) erfüllen.

Dann gelten zunächst die folgenden beiden Sätze:

Satz 12. *Jede r-gliedrige Gruppe vom Range Null enthält sicher eine ausgezeichnete infinitesimale Transformation $X_r f$.*

Satz 13. *Die erste derivierte Gruppe einer r-gliedrigen Gruppe vom Range Null ist höchstens $(r-2)$-gliedrig; ist sie gerade $(r-2)$-gliedrig, so wird sie durch die infinitesimalen Transformationen $X_3 f \cdots X_r f$ erzeugt.*

Beide Sätze ergeben sich unmittelbar aus den Relationen (6).

Für die Gruppen vom Range Null nimmt die charakteristische Gleichung eine besonders einfache Gestalt an.

Die allgemeine Form derselben war:

$$7)\quad \begin{vmatrix} \sum\limits_1^r{}^i\, e_i c_{i11} - \omega & \cdot & \sum\limits_1^r{}^i\, e_i c_{i1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum\limits_1^r{}^i\, e_i c_{ir1} & \cdot & \sum\limits_1^r{}^i\, e_i c_{irr} - \omega \end{vmatrix} = 0$$

Diese Gleichung hat für die Gruppen vom Range Null nur verschwindende Wurzeln ω; wir werden deshalb in der Folge alle ω in in den Diagonalgliedern weglassen.

$X_r f$ ist ausgezeichnete Transformation der Gruppe, mithin sind alle $c_{irs} \equiv 0 \quad s = 1 \cdots r$, es verschwindet also jedes Glied der letzten Horizontalreihe; und da dann auch alle $c_{ris} \equiv 0$, so ist in allen übrigen Gliedern der Determinante nur bis $r - 1$ zu summieren, die Gleichung (7) nimmt also zunächst folgende Gestalt an:

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} \sum_1^{r-1} {}^i e_i c_{i11} & \sum_1^{r-1} {}^i e_i c_{i12} & \cdot & \sum_1^{r-1} {}^i e_i c_{i1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_1^{r-1} {}^i e_i c_{ir-11} & \sum_1^{r-1} {}^i e_i c_{ir-12} & \cdot & \sum_1^{r-1} {}^i e_i c_{ir-1r} \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Weiter folgt aus (3), da alle $(X_i X_{r-1})$ nur von $X_r f$ abhängen, $X_{r-1} f$ also, wie wir uns ausdrücken können, ausgezeichnet (mod. X_r) ist, dass alle

$$c_{ir-11} = c_{ir-12} = \cdots = c_{ir-1r-1} = 0 ;$$

also verschwinden von der $(r - 1)$. Horizontalreihe alle $(r - 1)$ ersten Glieder identisch. Nun ist $X_r f$ eine invariante Untergruppe der G_r, setzen wir also $X_r \equiv 0$, so bilden $X_1 f \cdots X_{r-1} f$ eine isomorphe Gruppe; es sei gestattet, im Folgenden der Kürze halber $X_1 f \cdots X_{r-1} f$ als eine mit der G_r *(mod.* X_r) *isomorphe Gruppe* zu bezeichnen. Dann erhalten wir die Determinante der (mod. X_r) isomorphen G_{r-1} einfach dadurch, dass wir in der charakteristischen Determinante der G_r die letzte Vertikal- und die letzte Horizontalreihe weglassen. In dieser isomorphen $(r - 1)$-gliedrigen Gruppe ist $X_{r-1} f$ ausgezeichnet und mit den c_{ir-1s} sind auch alle $c_{r-1is} = 0$; also ist in jedem Glied der Determinante der (mod. X_r) isomorphen G_{r-1} nur bis $r - 2$ zu summieren.

$X_{r-2} f$ ist ausgezeichnet (modd. X_{r-1}, X_r), also sind

$$c_{ir-21} = c_{ir-22} = \cdots = c_{ir-2r-2} = 0 .$$

So geht es weiter; $X_{r-q} f$ ist ausgezeichnet (modd. $X_{r-q+1} \cdots X_r$); mithin verschwinden in der $(r - q)$ten Horizontalreihe alle $r - q$ ersten Glieder. $X_{r-q+1} f \cdots X_r f$ ist eine invariante Untergruppe der G_r, folglich ist $X_1 f \cdots X_{r-q} f$ eine (modd. $X_{r-q+1} \cdots X_r$) isomorphe $(r-q)$-gliedrige Gruppe, und in der zu ihr gehörigen charakteristischen Determinante, die aus den $r - q$ ersten Horizontal- und den $r - q$ ersten Vertikalreihen der Determinante der G_r gebildet wird, ist nur bis $r - q - 1$ zu summieren. So ergiebt sich schliesslich, dass die charakteristische Determinante der 2-gliedrigen, isomorphen Gruppe $X_1 f$, $X_2 f$,

die wir erhalten, wenn wir die infinitesimalen Transformationen der invarianten Untergruppe $X_3 f \cdots X_r f$ der G_r identisch Null setzen, die Form hat

$$\begin{vmatrix} e_1 c_{111} & e_1 c_{112} \\ e_1 c_{121} & e_1 c_{122} \end{vmatrix} .$$

Hier ist aber $X_2 f$ ausgezeichnet, also

$$c_{121} = c_{122} = 0 ,$$

und da selbstverständlich auch

$$c_{111} = c_{112} = 0$$

ist, so verschwinden in dieser Determinante sämtliche Glieder und die charakteristische Gleichung der r-gliedrigen Gruppe erhält die Gestalt:

$$(9) \quad \varDelta \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & \sum_1^2 {}^i e_i c_{i13} & \sum_1^3 {}^i e_i c_{i14} & \cdot & \sum_1^{r-1} {}^i e_i c_{i1r} \\ 0 & 0 & \sum_1^2 {}^i e_i c_{i23} & \sum_1^3 {}^i e_i c_{i24} & \cdot & \sum_1^{r-1} {}^i e_i c_{i2r} \\ 0 & 0 & 0 & \sum_1^3 {}^i e_i c_{i34} & \cdot & \sum_1^{r-1} {}^i e_i c_{i3r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \sum_1^{r-1} {}^i e_i c_{ir-1r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Wir setzen jetzt voraus, dass in der charakteristischen Gleichung (9) nicht alle $(r-2)$-reihigen Unterdeterminanten verschwinden sollen.

Diese Bedingung fordert zunächst, dass für beliebige, nicht sämtlich verschwindende Werte von $e_1 \cdots e_{r-1}$ $\sum_1^{r-1} {}^i e_i c_{ir-1r} \neq 0$ und ferner, dass in der $(r-1)$-reihigen Determinante der (mod. X_r) isomorphen G_{r-1} nicht alle $(r-3)$-reihigen Unterdeterminanten verschwinden. Also muss auch $\sum_1^{r-2} {}^i e_i c_{ir-2r-1} \neq 0$ sein, und in der $(r-2)$-reihigen Determinante der (modd. X_{r-1}, X_r) isomorphen Gruppe G_{r-2} dürfen nicht alle $(r-4)$-reihigen Determinanten verschwinden. Dazu ist aber wieder nötig, dass $\sum_1^{r-3} {}^i e_i c_{ir-3r-2} \neq 0$ ist und dass in der $(r-3)$-reihigen Determinante der (modd. $X_{r-2} X_{r-1} X_r$) isomorphen G_{r-3} nicht alle $(r-5)$-reihigen Unterdeterminanten verschwinden, und so fort; wir finden, dass jedes Glied $\sum_1^{r-q} {}^i e_i c_{ir-q\,r-q+1} \neq 0$ sein

muss und dass in der $(r-q)$-reihigen Determinante der (modd. $X_{r-q+1} \cdots X_r$) isomorphen G_{r-q} nicht alle $(r-q-2)$-reihigen Unterdeterminanten verschwinden dürfen; also dürfen auch endlich in der 3-reihigen Determinante der (modd. $X_4 \cdots X_r$) isomorphen G_3 nicht alle einreihigen Unterdeterminanten verschwinden, d. h. es muss $\sum_1^2 {}^i e_i c_{i23} \neq 0$ sein. Unsere Voraussetzung, dass in der charakteristischen Determinante der G_r nicht alle $(r-2)$-reihigen Unterdeterminanten verschwinden, ist also dann und nur dann erfüllt, wenn

$$\sum_1^2 {}^i e_i c_{i23} \neq 0\,, \quad \sum_1^3 {}^i e_i c_{i34} \neq 0\,, \quad \cdots \quad \sum_1^{r-1} {}^i e_i c_{ir-1r} \neq 0\,, \tag{10}$$

dann enthält die r-gliedrige Gruppe aber nur eine infinitesimale Transformation, die ausgezeichnet ist, eine und nur eine, die ausgezeichnet (mod. X_r), eine und nur eine, die ausgezeichnet (modd. $X_{r-1} X_r$), $\cdots$ eine und nur eine, die ausgezeichnet (modd. $X_{r-q} X_{r-q+1} \cdots X_r$) ist u. s. w.

Ausserdem ist sicher, dass, sobald die Bedingungen (10) erfüllt sind, unter den infinitesimalen Transformationen $(X_i X_k)$ der Gruppe $r-2$ unabhängig von einander sind, denn in der Matrix

$$M \equiv \left| \begin{array}{ccccc} c_{123} & c_{124} & c_{125} & \cdot & c_{12r} \\ 0 & c_{134} & c_{135} & \cdot & c_{13r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1r-1r} \\ 0 & c_{234} & c_{235} & \cdot & c_{23r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{2r-1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & c_{r-2r-1r} \end{array} \right| \tag{11}$$

verschwinden dann sicher nicht alle $(r-2)$-reihigen Determinanten; mithin gilt der folgende Satz:

Satz 14. *Wenn bei einer r-gliedrigen Gruppe vom Range Null in der charakteristischen Gleichung* $\Delta = 0$ *nicht alle* $(r-2)$*-reihigen Unterdeterminanten identisch verschwinden, so enthält die Gruppe eine und nur eine ausgezeichnete infinitesimale Transformation* $X_r f$, *eine und nur eine infinitesimale Transformation* $X_{r-1} f$, *die ausgezeichnet mod.* X_r, *eine und nur eine,* $X_{r-2} f$, *die ausgezeichnet modd.* X_{r-1}, X_r, *eine und nur eine,* $X_{r-3} f$, *die ausgezeichnet modd.* X_{r-2}, X_{r-1}, X_r, *und so fort;* $X_3 f$ *ist ausgezeichnet modd.* $X_4 \cdots X_r$; $X_2 f$ *und* $X_1 f$

sind ausgezeichnet modd. $X_3 \cdots X_r$. *Die erste derivierte Gruppe der r-gliedrigen Gruppe ist* $(r-2)$*-gliedrig*[1]).

Damit ist der Fall erledigt, dass in der charakteristischen Gleichung einer r-gliedrigen Gruppe vom Range Null alle $(r-1)$-reihigen, nicht aber alle $(r-2)$-reihigen Unterdeterminanten identisch verschwinden.

Aus den vorstehenden Überlegungen ergiebt sich sofort, unter welchen Umständen in der charakteristischen Gleichung einer r-gliedrigen Gruppe alle $(r-2)$-reihigen Unterdeterminanten identisch Null sind, nicht aber alle $(r-3)$-reihigen.

Das Verschwinden aller $(r-2)$-reihigen Unterdeterminanten kann nämlich einmal dadurch herbeigeführt werden, dass das Glied $\sum_1^{r-1} {}^i e_i c_{ir-1r} = 0$ wird; dann enthält die Gruppe ausser $X_r f$ noch eine weitere ausgezeichnete Transformation $X_{r-1}f$. Ist aber $\sum_1^{r-1} {}^i e_i c_{ir-1r} \neq 0$, dann können alle $(r-2)$-reihigen Unterdeterminanten dadurch Null werden, dass in der Determinante der (mod. X_r) isomorphen G_{r-1} alle $(r-3)$-reihigen Unterdeterminanten verschwinden; dann muss also entweder $\sum_1^{r-2} {}^i e_i c_{ir-2r-1} = 0$ sein, d. h. in der G_{r-1} ist ausser X_{r-1} noch X_{r-2} ausgezeichnet — und dann enthält die G_r 2 infinitesimale Transformationen, die (mod. X_r) ausgezeichnet sind —, oder es müssen in der Determinante der (modd. $X_{r-1} X_r$) isomorphen Gruppe G_{r-2} alle $(r-4)$-reihigen Determinanten verschwinden, was wiederum nur möglich ist, wenn die G_{r-2} 2 ausgezeichnete infinitesimale Transformationen enthält, die G_r also 2 (modd. $X_{r-1} X_r$) ausgezeichnete Transformationen, — oder wenn in der Determinante der (modd. $X_{r-2} X_{r-1} X_r$) isomorphen Gruppe G_{r-3} alle $(r-5)$-reihigen Determinanten verschwinden, und so fort; ist insbesondre jedes Glied $\sum_1^{k} {}^i e_i c_{ikk+1} \neq 0$ für $2 < k \leqq r-1$, so muss dann sicher $\sum_1^{2} {}^i e_i c_{i23} = 0$ sein, d. h. in der G_r ist ausser $X_3 f$ auch noch $X_2 f$ (und dann selbstverständlich auch $X_1 f$) ausgezeichnet modd. $X_4 \cdots X_r$; in diesem Falle verschwindet in der charakteristischen Gleichung der G_r auch jedes Glied der 3. Vertikalreihe und in der Matrix M (11) jede $(r-2)$-reihige Determinante, die erste derivierte Gruppe ist also sicher höchstens $(r-3)$-gliedrig.

1) Bez. des letzten Teiles dieses Satzes vergl. Killing, Z. v. Gr. I, S. 288.

Auch für $\sum_1^3 {}^i e_i c_{i34} = 0$ verschwinden in der Matrix (11) alle $(r-2)$-reihigen Determinanten und die erste derivierte Gruppe ist daher ebenfalls höchstens $(r-3)$-gliedrig.

Aus dem Verschwinden einer der Glieder $\sum_1^k {}^i e_i c_{ikk+1}$, wo $k > 3$, lässt sich dagegen betreffs der Zahl der Parameter in der ersten derivierten Gruppe kein Schluss ziehen, denn es brauchen dann mit $\sum_1^k {}^i e_i c_{ikk+1} = 0$ noch nicht alle $(r-2)$-reihigen Determinanten der Matrix (11) zu verschwinden.

Wir sprechen unser Resultat in folgendem Satze aus:

Satz 15[1]. *Verschwinden in der charakteristischen Gleichung* $\Delta = 0$

---

1) Dass der von Killing, Math. Ann. Bd. 31, 1888, S. 288 aufgestellte Satz: »... Verschwinden in der Determinante $|\gamma_{ik}|$ alle Unterdeterminanten vom Grade $r-k$, so enthält jede Mannigfaltigkeit von Transformationen, welche mit einer beliebig gewählten Transformation vertauschbar sind, eine $(k-1)$ dimensionale Mannigfaltigkeit von solchen, welche mit allen vertauschbar sind« auch bei der von Killing gewählten Darstellung der G_r vom Range Null eine Einschränkung im Sinne des Satzes 15 zu erfahren hat, erhellt auch aus dem folgenden Beispiele:

Die Gruppe

$$p \quad r \quad zq \quad \tfrac{1}{2}x^2 q \quad xq \quad q$$

hat die Zusammensetzung

$$(X_1 X_4) = X_5 \quad (X_1 X_5) = X_6 \quad (X_2 X_3) = X_6\,, \quad \text{alle übrigen} \quad (X_i X_k) = 0\,.$$

Die charakteristische Gleichung wird

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -e_4 & -e_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Hier sind alle 3-reihigen Unterdeterminanten Null, während die 2-reihigen nicht sämtlich verschwinden. Die Gruppe enthält eine ausgezeichnete infinitesimale Transformation, q, und nur diese eine, denn suchen wir eine zweite ausgezeichnete infinitesimale Transformation

$$Y \equiv \lambda_1 p + \lambda_2 r + \lambda_3 zq + \tfrac{1}{2}\lambda_4 x^2 q + \lambda_5 xq\,,$$

so giebt zunächst

$(X_1 Y) = \lambda_4 X_5 + \lambda_5 X_6 = 0$, also $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$. $(X_2 Y) = \lambda_3 X_6 = 0$, also $\lambda_3 = 0$. $(X_3 Y) = -\lambda_2 X_6 = 0$, also $\lambda_2 = 0$. $(X_4 Y) = -\lambda_1 X_5 = 0$, also $\lambda_1 = 0$.

Also ist q in der That die einzige infinitesimale Transformation der Gruppe, welche mit allen anderen vertauschbar ist. Dagegen enthält die Gruppe 3 unabhängige infinitesimale Transformationen X_5, X_3, X_2, welche (mod. X_6) ausgezeichnet sind, und die erste derivierte Gruppe ist xq, q, also 2-gliedrig.

einer Gruppe vom Range Null alle $(r-2)$*-reihigen Unterdeterminanten identisch, nicht aber alle Unterdeterminanten* $(r-3)$*. Grades, so enthält die Gruppe entweder 2 unabhängige ausgezeichnete infinitesimale Transformationen, oder 2 unabhängige infinitesimale Transformationen,* (*ausser* X_1 *und* X_2), *die in Bezug auf dieselben Moduln ausgezeichnet sind. Sind unter den Transformationen* $X_4 \cdots X_r$ *nicht 2 in Bezug auf dieselben Moduln ausgezeichnete enthalten, so ist* X_3 *ausgezeichnet* (*modd.* $X_5 \cdots X_r$) *oder* X_3 *ausgezeichnet* (*modd.* $X_4 \cdots X_r$)*; in diesen beiden Fällen ist die erste derivierte Gruppe höchstens* $(r-3)$*-gliedrig.*

Man könnte weiter untersuchen, welche Bedeutung das Verschwinden sämtlicher Unterdeterminanten $(r-3)$ten, $(r-4)$ten und niederer Grade für den Charakter der r-gliedrigen Gruppen hat; jedoch tritt dann sehr rasch eine grössere Complikation von Fällen ein, deren eingehende Betrachtung von geringem Interesse sein dürfte; erwähnt sei nur, dass das Auftreten von q unabhängigen ausgezeichneten infinitesimalen Transformationen in der G_r allerdings das Verschwinden sämtlicher $(r-q)$-reihigen Determinanten von Δ nach sich zieht, dass aber das Umgekehrte nicht der Fall zu sein braucht.

B. Bestimmung aller Typen von Zusammensetzungen der Gruppen vom Range Null bis zu den Gruppen mit 6 Parametern.

Es wird im Folgenden unsere Aufgabe sein, die Zusammensetzung der Gruppen vom Range Null, wie sie durch die Relationen (6) gegeben ist, noch weiter zu vereinfachen und dabei sämtliche Gruppen vom Range Null nach gewissen Typen von Zusammensetzungen zu ordnen.

Zwei verschiedene Zusammensetzungen betrachten wir dann und nur dann als verschiedne »Typen« von Zusammensetzungen, wenn es nicht möglich ist, durch geeignete Wahl der unabhängigen, infinitesimalen Transformationen die eine in die andre überzuführen.

Bei der Bestimmung aller Typen von Zusammensetzungen wird der oben aufgestellte Satz für uns leitender Gesichtspunkt sein, dass jede r-gliedrige Gruppe vom Range Null, welche die Zusammensetzung (6) besitzt, wenigstens eine ausgezeichnete infinitesimale Transformation $X_r f$ hat, und dass wir demnach eine $(r-1)$-gliedrige, isomorphe Gruppe vom Range Null erhalten, sobald wir in der r-gliedrige Gruppe $X_r \equiv 0$ setzen.

Daraus folgt, dass wir umgekehrt alle Typen von Zusammensetzungen der G_r vom Range Null leicht finden können, wenn uns alle Typen von Zusammensetzungen der G_{r-1} vom Range Null bekannt sind, wir haben dann nur zu allen Relationen $(X_i X_k)$ der G_{r-1} ein Glied von der Form $\alpha_{ik} X_r$ hinzuzufügen und die α_{ik} so zu bestimmen, dass für alle $X_1 \cdots X_r$ die Jacobische Identität $(X_i X_k X_j) \equiv 0$ erfüllt ist.

Abweichend vom bisherigen Gebrauche werden wir im Folgenden die $r+1$ unabhängigen infinitesimalen Transformationen, welche eine $(r+1)$-gliedrige Gruppe vom Range Null bestimmen, nach dem Beispiele von Killing mit $X_0 f,\ X_1 f, \cdots X_r f$ bezeichnen; es sollen also für alle folgenden Untersuchungen die Relationen (12) gelten:

$$(12) \quad \begin{cases} (X_i X_k) = \sum_{k+1}^{r} {}_s\, c_{iks} X_s f \\ i = 0,\ 1 \cdots r-1 \quad k = i+1,\ i+2,\ \cdots r. \end{cases}$$

§ 7.

Die Zusammensetzung der zwei-, drei- und viergliedrigen Gruppen vom Range Null.

Eine 2-gliedrige Gruppe $X_0 f,\ X_1 f$ vom Range Null hat der Bedeutung des Begriffes »Rang Null« gemäss immer die Zusammensetzung

$$\boxed{(X_0 X_1) = 0}\ .$$

Jede 3-gliedrige Gruppe $X_0 f,\ X_1 f,\ X_2 f$ vom Range Null hat nach (12) die Zusammensetzung:

$$(X_0 X_1) = c_{012} X_2 \quad (X_0 X_2) = (X_1 X_2) = 0\ .$$

Ist hier $c_{012} \neq 0$, dann ersetzen wir X_1 durch $\frac{1}{c_{012}} X_1$, dann wird $(X_0 X_1) = X_2$.

Demnach haben wir 2 Typen von Zusammensetzungen der 3-gliedrigen Gruppen zu unterscheiden, je nachdem $c_{012} \neq 0$ oder $= 0$ ist:

$$\text{I.} \quad \boxed{(X_0 X_1) = X_2 \quad (X_0 X_2) = 0 \quad (X_1 X_2) = 0}$$

$$\text{II.} \quad \boxed{(X_0 X_1) = 0 \quad (X_0 X_2) = 0 \quad (X_1 X_2) = 0}$$

Für I. verschwinden in der zugehörigen charakteristischen Gleichung nicht alle Unterdeterminanten 1. Grades, für II. sind auch alle einreihigen Unterdeterminanten Null.

Alle 4-gliedrigen Gruppen $X_0 f,\ X_1 f,\ X_2 f,\ X_3 f$ geben für

$X_4 f \equiv 0$ entweder Typus I der G_3 oder Typus II der G_3 als isomorphe 3-gliedrige Gruppe, demnach sind bei der Zusammensetzung der G_4 folgende zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $(X_0 X_1) = X_2 + \alpha X_3 \quad (X_0 X_2) = \beta X_3 \quad (X_1 X_2) = \gamma X_3 \quad (X_i X_3) = 0$
$i = 0, \cdots 3,$

2. $(X_0 X_1) = \alpha X_3, \qquad (X_0 X_2) = \beta X_3 \quad (X_1 X_2) = \gamma X_3 \quad (X_i X_3) = 0.$

Wir behandeln beide Fälle gemeinsam, indem wir setzen

$$(X_0 X_1) = a_2 X_2 + \alpha X_3,$$

wo also $a_2 = 1$ oder $= 0$ zu setzen ist.

Dann erkennen wir leicht, dass, sobald α, β und γ nicht sämtlich gleich Null sind, sicher immer zwei von diesen Constanten den Wert Null erhalten können, die dritte den Wert 1.

Ist z. B. $\beta \neq 0$, dann setzen wir

$$X_1' = X_1 + \lambda X_0 + \mu X_2,$$

dann wird

$$(X_0 X_1') = a_2 X_2 + (\alpha + \mu\beta) X_3, \quad (X_1' X_2) = (\gamma + \lambda\beta) X_3,$$

also ist für $\lambda = -\frac{\gamma}{\beta} \quad \mu = -\frac{\alpha}{\beta}$

$$(X_0 X_1) = a_2 X_2 \quad (X_0 X_2) = \beta X_3 \quad (X_1 X_2) = 0.$$

Setzen wir dann noch

$$X_0' = X_0 \quad X_1' = \varrho X_1 \quad X_2' = \varrho X_2 \quad X_3' = X_3,$$

so wird

$$(X_0' X_1') = a_2 X_2' \quad (X_0' X_2') = \varrho\beta X_3' \quad (X_1' X_2') = 0;$$

für $\varrho = \frac{1}{\beta}$ nehmen diese Relationen also die einfache Form an

A. $\qquad (X_0 X_1) = a_2 X_2 \quad (X_0 X_2) = X_3 \quad (X_1 X_2) = 0.$

Ist $\beta = 0$ und $\gamma \neq 0$, dann setzen wir $X_0' = X_0 + \lambda_2 X_2$, dann wird $(X_0' X_1) = a_2 X_2 + (\alpha - \lambda_2 \gamma) X_3 \; (X_0' X_2) = 0$, also wird für $\lambda_2 = \frac{\alpha}{\gamma}$ $(X_0 X_1) = a_2 X_2 \quad (X_0 X_2) = 0 \quad (X_1 X_2) = \gamma X_3$; setzen wir hier noch $X_0' = \frac{1}{\gamma} X_0, \quad X_1' = X_1, \quad X_2' = \frac{1}{\gamma} X_2, \quad X_3' = X_3$, so erhalten wir die Form

B. $\qquad (X_0 X_1) = a_2 X_2 \quad (X_0 X_2) = 0 \quad (X_1 X_2) = X_3.$

Sind endlich $\beta = 0$ und $\gamma = 0$, dann setzen wir $X_2' = a_2 X_2 + \alpha X_3$ und erhalten, wenn a_2 oder $\alpha \neq 0$,

C. $\qquad (X_0 X_1) = X_2 \quad (X_0 X_2) = 0 \quad (X_1 X_2) = 0.$

Weiter aber ist evident, dass die Fälle A. und B. für $a_2 = 0$ sofort auf C. zurückzuführen sind, wenn X_2 mit X_1 vertauscht, beziehentlich X_1 durch X_0, X_2 durch X_1, X_3 durch X_2 ersetzt wird, und dass B. $a_2 = 1$ identisch ist mit A. $a_2 = 1$, sobald wir setzen

$$X_1' = X_0 \quad X_0' = -X_1 \quad X_2' = X_2 \quad X_3' = X_3\,,$$

denn es wird dann

$$(X_0' X_1') = X_2'\,, \quad (X_1' X_2') = X_3'\,, \quad (X_0' X_2') = 0\,.$$

Wir haben also nur 2 Fälle als wesentlich verschieden zu betrachten: 1. A., für $a_2 = 1$; 2. C., wozu endlich noch der Fall kommt, dass alle Constanten von vorn herein Null sind, die Gruppe also lauter vertauschbare Transformationen enthält; mithin ergeben sich 3 Typen der Zusammensetzung von 4-gliedrigen Gruppen:

I.	$(X_0 X_1) = X_2$	$(X_0 X_2) = X_3$	$(X_1 X_2) = 0$	$(X_i X_3) = 0$
II.	$(X_0 X_1) = X_2$	$(X_0 X_2) = 0$	$(X_1 X_2) = 0$	$(X_i X_3) = 0$
III.	$(X_0 X_1) = 0$	$(X_0 X_2) = 0$	$(X_1 X_2) = 0$	$(X_i X_3) = 0$

Bei den Gruppen vom Typus I sind in der charakteristischen Gleichung nicht alle 2-reihigen Unterdeterminanten Null; die Gruppen enthalten eine ausgezeichnete infinitesimale Transformation, $X_3 f$; bei Typus II sind alle 2-reihigen, nicht aber alle einreihigen Determinanten Null, und 2 unabhängige infinitesimale Transformationen sind ausgezeichnet, $X_2 f$, $X_3 f$; bei III. endlich verschwinden alle einreihigen Unterdeterminanten, die Transformationen sind sämtlich miteinander vertauschbar.

§ 8.

Einige besondere Fälle von Zusammensetzungen.

Bevor wir in der successiven Bestimmung aller Typen von Zusammensetzungen fortfahren, wird es sich empfehlen, zur Vermeidung öfterer Wiederholungen einige allgemeine Gesichtspunkte hervorzuheben, die sich in gewissen besondren Fällen von Zusammensetzungen gewinnen lassen.

Zunächst leuchtet ein, dass, wenn in den Relationen (12)

$$(X_i X_k) = \sum_{k+1}^{r} {}_s\, c_{iks} X_s f \quad i = 0\,, \cdots r-1\,, \quad k = i+1\,, \cdots r$$

irgend ein $c_{ok\,k+1} \neq 0$ ist, die Relation

$$(X_0 X_k) = \sum_{k+1}^{r} {}_s\, c_{oks} X_s f$$

die besondere Form erhalten kann

(13) $$(X_0 X_k) = X_{k+1} f\,,$$

denn wir können in diesem Falle immer

$$X_{k+1}'f = c_{ok\,k+1} X_{k+1}f + \cdots + c_{okr} X_r f$$

setzen, ohne die übrigen Relationen wesentlich zu verändern.

Sind insbesondre alle $c_{ok\,k+1} \neq 0$, für $k = 1, \cdots r-1$, so erhalten wir die Relationen

$$(14) \qquad (X_0 X_1) = X_2 \quad (X_0 X_2) = X_3 \quad \cdots\cdots \quad (X_0 X_{r-1}) = X_r\,.$$ [1]

Bilden wir dann die Jacobische Identität $(X_0 X_1 X_k)$, so erhalten wir, da $(X_1 X_k)$ nach (12) nur von $X_{k+1}f \cdots X_r f$ abhängt:

$$(X_0 X_1 X_k) \equiv (X_2 X_k) + [X_{k+2} \cdots X_r] + (X_1 X_{k+1}) \equiv 0\,,$$

also

$$(X_2 X_k) = [X_{k+2} \cdots X_r]\,.$$

Ferner giebt

$$(X_0 X_1 X_{k+1}) \equiv (X_2 X_{k+1}) + [X_{k+3} \cdots X_r] + (X_1 X_{k+2}) \equiv 0\,,$$

also

$$(X_2 X_{k+1}) = [X_{k+3} \cdots X_r]\,.$$

Dann wird aber

$$(X_0 X_2 X_k) \equiv (X_3 X_k) + [X_{k+3} \cdots X_r] + [X_{k+3} \cdots X_r] \equiv 0\,, \quad \text{also}$$

$$(X_3 X_k) = [X_{k+3} \cdots X_r]\,.$$

Es gilt sonach für $i = 1, 2, 3$ die Formel

$$(X_i X_k) = [X_{i+k} \cdots X_r] \quad k = i+1, \cdots r\,.$$

Um dieselbe allgemein zu beweisen, haben wir nur zu zeigen, dass sie für $(X_{m+1} X_k)$ gilt, sobald wir voraussetzen, dass sie für alle Werte $i \leqq m$ richtig ist.

Es sei also bewiesen, dass

$$(X_i X_k) = [X_{i+k} \cdots X_r] \quad i \leqq m\,.$$

Dann bilden wir die Jacobische Identität $(X_0 X_m X_k)$:

$$(X_0 X_m X_k) \equiv (X_{m+1} X_k) + [X_{m+k+1} \cdots X_r] + (X_m X_{k+1}) \equiv 0\,.$$

Nun ist nach Voraussetzung

$$(X_m X_{k+1}) = [X_{m+k+1} \cdots X_r]\,,$$

also auch

$$(X_{m+1} X_k) = [X_{m+k+1} \cdots X_r]\,,$$

mithin gilt unter Voraussetzung der Relationen (14) allgemein

$$(15) \qquad (X_i X_k) = [X_{i+k} \cdots X_r]\,.$$

Eine besondere Behandlung gestattet die Bestimmung aller Typen von Zusammensetzungen der G_{r+1} vom Range Null in dem Falle, dass sich die erste derivierte Gruppe einer $(r+1)$-gliedrigen Gruppe vom Range Null $X_0 f$, $X_1 f \cdots X_r f$ auf die eingliedrige Gruppe $X_r f$ reduziert.

---

[1] Vgl. Killing, Z. v. G. I. § 9.

Um diesen Fall zu erledigen, seien erst einige allgemeinere Bemerkungen vorausgeschickt[1]).

Definieren wir $x_1 \cdots x_n$ bez. $y_1 \cdots y_n$ als die homogenen Coordinaten zweier Punkte des $(n-1)$-fach ausgedehnten Raumes R_{n-1}, so ordnet eine bilineare Gleichung von der Form

$$(16) \quad \sum_{ik}^{1\ldots n} c_{ik}(x_i y_k - x_k y_i) = 0\,, \quad \text{wo alle} \quad c_{ii} = 0 \quad \text{und} \quad c_{ik} = -c_{ki}\,,$$

jedem Punkte $x_1 \cdots x_n$ des R_{n-1} eine ebene, $(n-2)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit M_{n-2} zu, deren laufende Coordinaten die $y_1 \cdots y_n$ sind; jeder Punkt liegt auf der ihm zugeordneten Mannigfaltigkeit; mit andern Worten, die Gleichung (16) stellt einen linearen Liniencomplex des $(n-1)$-fach ausgedehnten Raumes R_{n-1} dar. Voraussetzung ist noch, dass alle $c_{ii} = 0$ und $c_{ik} = -c_{ki}$, die Determinante $|c_{ik}|$ ist also eine sog. schiefe Determinante; sie verschwindet identisch, wenn n ungerade und bildet ein vollständiges Quadrat, wenn n eine gerade Zahl ist.

Nehmen wir jetzt an, dass $|c_{ik}| \neq 0$, dann muss also n eine gerade Zahl sein, etwa $n = 2m$; dann definiert die Gleichung (16) einen allgemeinen linearen Liniencomplex des R_{n-1}; dieser Complex lässt sich durch eine projektive Transformation in jeden anderen allgemeinen Liniencomplex des R_{n-1} überführen, also auch in den Complex

$$(17) \qquad \sum_{1}^{m} {}^{i} (x_i y_{m+i} - y_i x_{m+i}) = 0\,,$$

wo alle $c_{im+i} = 1$, alle übrigen Constanten Null sind.

Ist dagegen $|c_{ik}| = 0$, so können wir immer ein Gleichungssystem

$$(18) \qquad \sum_{1}^{n} {}^{i} c_{ik} x_i = 0 \quad k = 1 \cdots n$$

aufstellen, welches durch Werte von $x_1 \cdots x_n$, die nicht sämtlich Null sind, befriedigt wird.

Ist nun n ungerade, so brauchen mit $|c_{ik}| = 0$ nicht zugleich sämtliche Unterdeterminanten $(n-1)$. Grades zu verschwinden; ist irgend eine derselben verschieden von Null, so reduzieren sich die Gleichungen (18) auf $n-1$ unabhängige; jede derselben definiert eine $(n-2)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit M_{n-2}, und alle diese $n-1$ M_{n-2} schneiden sich in einem Punkte x_k des R_{n-1}, dessen Coordinaten die Gleichungen (18) identisch erfüllen. Diesem Punkte wird durch die Gleichung (16) keine bestimmte M_{n-2} zugeordnet, d. h., es

---

1) Die folgenden Entwicklungen verdankt der Verfasser in ihren Grundzügen einer Mitteilung des Herrn Prof. Engel.

muss sich für diesen Punkt die Gleichung (16) auf eine Identität reduzieren.

Durch eine Coordinatentransformation können wir nun immer erreichen, dass dieser spezielle Punkt die Coordinaten erhält

$$x_1' = 0\,, \cdots x_{n-1}' = 0\,,\quad x_n' \neq 0\,.$$

Führen wir in (16) neue Coordinaten $x_1' \cdots x_n'$, $y_1' \cdots y_n'$ ein, so geht diese Gleichung über in

$$(16') \qquad \sum_{ik}^{1\ldots n} c_{ik}'(x_i'y_k' - x_k'y_i') = 0\,.$$

Diese Gleichung soll für den Punkt

$$x_1' = 0\,, \cdots x_{n-1}' = 0\,,\quad x_n' \neq 0$$

identisch erfüllt sein; setzen wir diese Werte ein, so reduziert sich (16′) auf

$$\sum_1^{n-1}{}^k c_{nk}'y_k' = 0\,,$$

dieser Ausdruck muss identisch verschwinden, also muss

$$c_{n1}' = c_{n2}' = \cdots = c_{n\,n-1}' = 0$$

sein, Gleichung (16′) hat also die Form

$$(19) \qquad \sum_{ik}^{1\ldots n-1} c_{ik}'(x_i'y_k' - x_k'y_i') = 0\,,$$

sie stellt also einen linearen Liniencomplex im R_{n-2} dar. $n-1$ ist eine gerade Zahl, etwa $= 2m$, die Determinante $|c_{ik}'|$ ist also im Allgemeinen $\neq 0$, und dann kann die Gleichung (19), wie oben bereits bemerkt wurde, auf die Form gebracht werden

$$\sum_1^m{}^i (x_iy_{m+i} - y_ix_{m+i}) = 0 \quad 2m = n-1\,.$$

War dagegen n eine gerade Zahl, $n = 2m$, so können wir allerdings Gleichung (16) auch in die Gleichung (19) überführen, da aber dann $n-1$ ungerade ist, verschwindet auch $|c_{ik}'|$ identisch. Dann aber können wir unsern früheren Ausführungen gemäss durch Transformation erreichen, dass alle $c_{n-1\,k}' = 0$, $k = 1 \cdots n-2$ und dass die Gleichung die Form annimmt

$$\sum_{ik}^{1\ldots n-2} c_{ik}'(x_i'y_k' - x_k'y_i') = 0$$

und wenn hier $|c_{ik}'| \neq 0$, da $n-2 = 2m$ gesetzt werden kann, diesen Liniencomplex des R_{n-3} überführen in den folgenden:

$$\sum_1^m{}^i (x_iy_{m+i} - y_ix_{m+i}) = 0 \quad 2m = n-2\,.$$

Aus diesen Entwicklungen geht hervor, dass die Gleichung (16)

$$\sum_{ik}^{1\ldots n} c_{ik}(x_i y_k - x_k y_i) = 0$$

durch eine projektive Transformation immer übergeführt werden kann in die folgende:

$$\sum_1^m {}_i\, (x_i y_{m+i} - y_i x_{m+i}) = 0\ ,$$

und zwar besitzt m, je nachdem $| c_{ik} | \neq 0$ oder $| c_{ik} | = 0$ und je nachdem mit $| c_{ik} | = 0$ auch alle Unterdeterminanten niedrer Grade verschwinden oder nicht, die folgenden Werte:

1., n ungerade: $2m = n - 1\ ,\ \ n - 3\ ,\ \ n - 5\ ,\ \cdots 2\ ,\ 0$

2., n gerade: $2m = n - 2\ ,\ \ n - 4\ ,\ \ n - 6\ ,\ \cdots 2\ ,\ 0\ .$

Dieses Ergebnis lässt sich nun ohne Weiteres für unsre Zwecke verwerten.

Betrachten wir nämlich allgemein eine $(r + 1)$-gliedrige Gruppe $X_1 f,\ X_2 f,\ \cdots X_{r+1} f$[1]) vom Range Null, die die besondre Zusammensetzung hat

$$(X_i X_k) = c_{ik} X_{r+1} f\ ,\quad (X_i X_{r+1}) = 0\ ;\quad i,\ k = 1 \cdots r\ .$$

Dann führt die Bestimmung aller 2-gliedrigen Untergruppen, in denen eine allgemeine Transformation $\sum_1^r {}_i\, \lambda_i X_i f$ enthalten ist, auf die Gleichung

$$\left(\sum_1^r {}_i\, \lambda_i X_i\ ,\ \sum_1^r {}_k\, \mu_k X_k\right) \equiv \sum_{ik}^{1\ldots r} (\lambda_i \mu_k - \lambda_k \mu_i) c_{ik} X_r f = 0\ ,$$

also

$$\sum_{ik}^{1\ldots r} (\lambda_i \mu_k - \lambda_k \mu_i) c_{ik} = 0\ . \tag{20}$$

Deuten wir hier $\lambda_1 \cdots \lambda_r\ ,\ \mu_1 \cdots \mu_r$ als homogene Coordinaten zweier Punkte des $(r - 1)$-fach ausgedehnten Raumes R_{r-1}, so stellt die Gleichung (20) einen linearen Liniencomplex des R_{r-1} dar, der nach den vorhergehenden Ausführungen transformiert werden kann in

$$\sum_1^m {}_i\, (\lambda_i \mu_{m+i} - \mu_i \lambda_{m+i}) = 0\ ;$$

mit andern Worten:

---

1) Der Verfasser ist hier mit Absicht von der in den vorhergehenden Paragraphen eingeführten Bezeichnungsweise der inf. Trfn. der $(r + 1)$-gliedrigen Gruppe abgewichen, um die folgenden Formeln übersichtlicher darstellen zu können. Die entsprechende Umformung des Endergebnisses erfordert keine Mühe.

Ist eine $(r+1)$-gliedrige Gruppe $X_1 f,\ X_2 f \cdots X_{r+1} f$ vom Range Null vorgelegt, welche die Zusammensetzung hat

$$(X_i X_k) = c_{ik} X_{r+1}\,, \quad (X_i X_{r+1}) = 0 \quad i,\ k = 1 \cdots r\,,$$

so lassen sich immer $r+1$ unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1' f \cdots X_{r+1}' f$ der Gruppe so wählen, dass die Relationen bestehen

$$(X_i' X_{m+i}') = X_{r+1}'\,, \quad i = 1 \cdots m\,,$$

alle andern $(X_i X_k)$ aber Null werden. Dabei ist

1., wenn r eine gerade Zahl, $2m = r$, sobald $| c_{ik} | \neq 0$; $= r-2$, sobald $| c_{ik} | = 0$, aber nicht alle $(r-2)$-reihigen Unterdeterminanten von $| c_{ik} |$ verschwinden; $= r-4$, wenn $| c_{ik} | = 0$, alle $(r-2)$-reihigen Unterdeterminanten $= 0$, aber nicht alle $(r-4)$-reihigen verschwinden; u. s. w., $= 2$, wenn alle Unterdeterminanten $(r-2.) \cdots 3.$ Grades $= 0$, nicht alle 2. Grades; $= 0$, wenn alle $c_{ik} = 0$.

2., wenn r eine ungerade Zahl, $2m = r-1$, wenn nicht alle $(r-1)$-reihigen Unterdeterminanten $= 0$; $= r-3$, wenn nicht alle $(r-3)$-reihigen Unterdeterminanten $= 0$, u. s. w; $= 2$, wenn nicht alle 2-reihigen Unterdeterminanten $= 0$; $= 0$, wenn alle $c_{ik} = 0$.

§ 9.

Die Zusammensetzung der 5-gliedrigen Gruppen vom Range Null.

Die allgemeine Form der Zusammensetzung der 5-gliedrigen Gruppen vom Range Null ist

$$(X_0 X_1) = a_2 X_2 + \alpha X_4 \quad (X_0 X_2) = a_3 X_3 + \beta X_4 \quad (X_0 X_3) = \gamma X_4$$
$$(X_1 X_2) = \delta X_4 \quad (X_1 X_3) = \varepsilon X_4 \quad (X_2 X_3) = \zeta X_4$$
$$(X_i X_4) = 0 \quad i = 0,\ 1,\ 2,\ 3\,.$$

Hier ist entweder $a_2 = a_3 = 1$, entsprechend dem Typus I der G_4
oder $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, » » » II » »
oder $a_2 = a_3 = 0$, » » » III » ».

Dann folgt zunächst aus der Jacobischen Identität

$$(21) \quad \begin{cases} (X_0 X_1 X_2) \equiv a_3 \varepsilon X_3 \equiv 0\,, & \text{also} \quad a_3 \varepsilon = 0\,; \\ (X_0 X_1 X_3) \equiv a_2 \zeta X_4 \equiv 0\,, & \text{also} \quad a_2 \zeta = 0\,. \end{cases}$$

Behandeln wir nun die einzelnen Fälle gesondert.

I., $a_2 = a_3 = 1$.

Nach § 8 und Formeln (21) erhalten wir zunächst:

$$(X_0 X_1) = X_2 \quad (X_0 X_2) = X_3 \quad (X_0 X_3) = \gamma X_4 \quad (X_1 X_2) = \delta X_4$$
$$(X_1 X_3) = (X_2 X_3) = (X_i X_4) = 0\,.$$

Ist $\gamma \neq 0$, dann führen wir γX_4 als neues X_4 ein und erreichen $(X_0 X_3) \doteq X_4$.

Ist $\delta \neq 0$, dann setzen wir

$$X_0' = \sqrt{\delta} X_0 \quad X_1' = X_1 \quad X_2' = \sqrt{\delta} X_2 \quad X_3' = \delta X_3 \quad X_4' = \delta \sqrt{\delta} X_4,$$

dann wird

$$(X_0' X_1') = X_2' \quad (X_0' X_2') = X_3' \quad (X_0' X_3') = X_4' \quad (X_1' X_2') = X_4'.$$

Ausserdem kann eine der Constanten β und δ oder jede von beiden Null sein; somit erhalten wir folgende 4 Typen:

		$(X_0 X_1)$	$(X_0 X_2)$	$(X_0 X_3)$	$(X_1 X_2)$	$(X_1 X_3)$	$(X_2 X_3)$	$(X_i X_4)$
	I.	X_2	X_3	X_4	X_4	0	0	0
A.	II.	X_2	X_3	X_4	0	0	0	0
	III.	X_2	X_3	0	X_4	0	0	0
	IV.	X_2	X_3	0	0	0	0	0

Für die Gruppen von der Zusammensetzung I und II sind in der charakteristischen Gleichung alle 4-reihigen Unterdeterminanten Null, nicht alle 3-reihigen, die Gruppen enthalten 1 ausgezeichnete infinitesimale Transformation.

Für die Gruppen unter III und IV sind alle 3-reihigen Unterdeterminanten Null, nicht aber alle 2-reihigen, die Gruppen enthalten 2 ausgezeichnete Transformationen.

II. $a_2 = 1$. $a_3 = 0$.

Dann ist $\zeta = 0$, und wir erhalten

$$(X_0 X_1) = X_2 \quad (X_0 X_2) = \beta X_4 \quad (X_0 X_3) = \gamma X_4 \quad (X_1 X_2) = \delta X_4$$
$$(X_1 X_3) = \varepsilon X_4 \quad (X_2 X_3) = 0 \quad (X_i X_4) = 0.$$

1. *Es sei* $\delta \neq 0$; setzen wir $X_4' = \delta X_4$, so wird

$$(X_0 X_1) = X_2 \; (X_0 X_2) = \beta' X_4 \; (X_0 X_3) = \gamma' X_4 \; (X_1 X_2) = X_4 \; (X_1 X_3) = \varepsilon' X_4,$$

wo $\beta' = \frac{\beta}{\delta}$ etc.

Setzen wir weiter

$$X_0' = X_0 - \beta' X_1 \quad X_1' = X_1 \quad X_2' = X_2 \quad X_3' = -\varepsilon' X_2 + X_3 \quad X_4' = X_4,$$

dann erhalten obige Relationen die Form:

$$(X_0 X_1) = X_2 \quad (X_0 X_2) = 0 \quad (X_0 X_3) = \gamma'' X_4 \quad (X_1 X_2) = X_4 \quad (X_1 X_3) = 0.$$

Ist nun $\gamma'' \neq 0$, so multiplizieren wir X_1, X_2, X_3, X_4 mit γ'' und erreichen, dass $(X_0 X_3) = X_4$.

Also haben wir für den Fall, dass $\delta \neq 0$, die beiden Typen:

		$(X_0 X_1)$	$(X_0 X_2)$	$(X_0 X_3)$	$(X_1 X_2)$	$(X_1 X_3)$	$(X_2 X_3)$	$(X_i X_4)$
B.	I.	X_2	0	X_4	X_4	0	0	0
	II.	X_2	0	0	X_4	0	0	0

In beiden Fällen verschwinden alle 3-reihigen Unterdeterminanten in der charakteristischen Gleichung. Typus I enthält 2 Transformationen, die ausgezeichnet (mod. X_4) sind, Typus II 2 ausgezeichnete infinitesimale Transformationen.

2. $\delta = 0$.

a. $\varepsilon \neq 0$; dann kann es immer den Wert 1 erhalten; die Zusammensetzung wird zunächst

$$(X_0 X_1) = X_2 \quad (X_0 X_2) = \beta X_4 \quad (X_0 X_3) = \gamma X_4 \quad (X_1 X_2) = 0 \quad (X_1 X_3) = X_4.$$

Setzen wir $X_0' = X_0 - \gamma X_1$, so wird $(X_0' X_3) = 0$; ist auch $\beta \neq 0$, so multiplizieren wir $X_0\ X_2\ X_3\ X_4$ mit $\frac{1}{\beta}$, so dass $(X_0 X_2) = X_4$ wird, dann sind sämtliche Constanten partikularisiert und die Zusammensetzung wird

$$(X_0 X_1) = X_2 \quad (X_0 X_2) = X_4 \quad (X_0 X_3) = 0 \quad (X_1 X_2) = 0 \quad (X_1 X_3) = X_4$$

oder wenn $\beta = 0$:

$$(X_0 X_1) = X_2 \quad (X_0 X_2) = 0 \quad (X_0 X_3) = 0 \quad (X_1 X_2) = 0 \quad (X_1 X_3) = X_4.$$

b. $\varepsilon = 0$. Ist dann $\beta \neq 0$, so setzen wir

$$X_3' = -\frac{\gamma}{\beta} X_2 + X_3 \quad X_4' = \beta X_4$$

und erhalten

$$(X_0 X_1) = X_2 \quad (X_0 X_2) = X_4' \quad (X_0 X_3') = 0 \quad (X_1 X_2) = (X_1 X_3) = 0.$$

Ist dagegen $\beta = 0$, so führen wir, falls $\gamma \neq 0$, γX_4 als X_4' ein, dann wird

$$(X_0 X_1) = X_2 \quad (X_0 X_2) = 0 \quad (X_0 X_3) = X_4 \quad (X_1 X_2) = (X_1 X_3) = 0;$$

dieser Typus wird jedoch identisch mit dem 2. unter 2[a], wenn wir setzen $X_1' = 0 \ X_0' = - X_1$.

Ist auch $\gamma = 0$, dann bleibt nur $(X_0 X_1) = X_2$; alle anderen Relationen sind Null. Somit erhalten wir bei $\delta = 0$ folgende Typen:

C.

	$(X_0 X_1)$	$(X_0 X_2)$	$(X_0 X_3)$	$(X_1 X_2)$	$(X_1 X_3)$	$(X_2 X_3)$	$(X_i X_4)$
I.	X_2	X_4	0	0	X_4	0	0
II.	X_2	0	X_4	0	0	0	0
III.	X_2	X_4	0	0	0	0	0
IV.	X_2	0	0	0	0	0	0

Bei I, II und III verschwinden nicht alle 2-reihigen Unterdeterminanten; in I sind 2 Transformationen ausgezeichnet mod. X_4, II und III enthalten 2 ausgezeichnete Transformationen.

Bei IV verschwinden nicht alle 1-reihigen Unterdeterminanten, 3 Transformationen sind ausgezeichnet.

III. $a_2 = a_3 = 0$.

Dann haben die Relationen die Form

$$\begin{array}{lll} (X_0 X_1) = c_{01} X_4 & (X_0 X_2) = c_{02} X_4 & (X_0 X_3) = c_{03} X_4 \\ (X_1 X_2) = c_{12} X_4 & (X_1 X_3) = c_{13} X_4 & (X_2 X_3) = c_{23} X_4 \end{array}$$
$$(X_i X_4) = 0 \quad i = 0, \cdots 3 .$$

Denken wir uns die Gruppe zunächst durch die 5 unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1 f, X_2 f \cdots X_5 f$ bestimmt, um die Resultate aus § 8 anwenden zu können, so ist r gerade, $= 4$; wenn also $| c_{ik} | \neq 0$, so ist $2m = 4$, $m = 2$, mithin $c_{13} = 1$, $c_{24} = 1$.

Ist $| c_{ik} | = 0$, so wird $2m = 2$, $m = 1$, also $c_{12} = 1$. Sind endlich auch alle 2-reihigen Unterdeterminanten von $| c_{ik} |$ Null, so verschwinden anch alle einreihigen; die Gruppe enthält nur vertauschbare Transformationen. Auf unsre gewöhnliche Bezeichnungsweise übertragen giebt dies also die 3 Fälle:

1. $c_{02} = 1 \quad c_{13} = 1$
2. $c_{01} = 1$
3. alle $c_{ik} = 0$.

Mithin haben wir die folgenden 3 Typen zu unterscheiden:

D.	$(X_0 X_1)$	$(X_0 X_2)$	$(X_0 X_3)$	$(X_1 X_2)$	$(X_1 X_3)$	$(X_2 X_3)$	$(X_i X_4)$
I.	0	X_4	0	0	X_4	0	0
II.	X_4	0	0	0	0	0	0
III.	0	0	0	0	0	0	0

Bei I und II sind alle 2-reihigen Unterdeterminanten der charakteristischen Gleichung Null, bei III auch alle einreihigen.

I enthält 1, II enthält 3, III lauter ausgezeichnete Transformationen.

Eine nähere Untersuchung der gefundnen Typen zeigt uns, dass einige derselben nicht wesentlich verschieden von einander sind.

B. II: $(X_0 X_1) = X_2 \ (X_0 X_2) = (X_0 X_3) = 0 \ (X_1 X_2) = X_4 \ (X_1 X_3) = 0$

geht über in:

C. III: $(X_0 X_1) = X_2 \ (X_0 X_2) = X_4 \ (X_0 X_3) = (X_1 X_2) = (X_1 X_3) = 0$,

sobald wir setzen:

$$X_1' = X_0 \quad X_0' = X_1 \quad X_2' = -X_2 \quad X_3' = X_3 \quad X_4' = -X_4 .$$

C. IV: $(X_0 X_1) = X_2 \quad (X_0 X_2) = (X_0 X_3) = (X_1 X_2) = X_1 X_3) = 0$

ist identisch mit:

D. II: $(X_0 X_1) = X_4 \quad (X_0 X_2) = (X_0 X_3) = (X_1 X_2) = (X_1 X_3) = 0$,

sobald wir X_2 mit X_4 vertauschen.

Ferner geht

B. I: $(X_0 X_1) = X_2 \ (X_0 X_2) = 0 \ (X_0 X_3) = X_4 \ (X_1 X_2) = X_4 \ (X_1 X_3) = 0$

über in

C. I: $(X_0X_1) = X_2 \quad (X_0X_2) = X_4 \quad (X_0X_3) = (X_1X_2) = 0 \quad (X_1X_3) = X_4$

durch die Substitution

$$X_1' = X_0 \quad X_0' = X_1 \quad X_2' = -X_2 \quad X_3' = -X_3 \quad X_4' = -X_4 .$$

Endlich ist es noch vorteilhaft, den Typus C. II:

$$(X_0X_1) = X_2 \quad (X_0X_2) = 0 \quad (X_0X_3) = X_4 \quad (X_1X_2) = (X_1X_3) = 0$$

durch die Substitution: $X_2' = X_3 \quad X_3' = X_2$ überzuführen in:

$$(X_0X_1) = X_3 \quad (X_0X_2) = X_4 \quad (X_0X_3) = (X_1X_2) = (X_1X_3) = 0 ,$$

weil sich aus dieser Form sofort erkennen lässt, dass dieser Typus wesentlich verschieden ist von

C. III: $(X_0X_1) = X_2 \quad (X_0X_2) = X_4 \quad (X_0X_3) = (X_1X_2) = (X_1X_3) = 0$.

Unter Berücksichtigung dieser letzten Bemerkungen ergiebt sich für die Zusammensetzungen der 5-gliedrigen Gruppen vom Range Null, wenn wir dieselben nach der Anzahl der in ihnen enthaltenen unabhängigen, ausgezeichneten infinitesimalen Transformationen einteilen, folgendes Schema:

		(X_0X_1)	(X_0X_2)	(X_0X_3)	(X_1X_2)	(X_1X_3)	(X_2X_3)	(X_iX_4) $i=0,1,2,3$	
1., 1 ausgezeichnete Trf., X_4f	I.	X_2	X_3	X_4	X_4	0	0	0	alle 4-reih. Determinanten=0.
	II.	X_2	X_3	X_4	0	0	0	0	
	III.	X_2	X_4	0	0	X_4	0	0	alle 3-reih. Det. = 0.
	IV.	0	X_4	0	0	X_4	0	0	alle 2-reih. Det. = 0.
2., 2 ausgezeichn. Trfn., X_3f, X_4f	V.	X_2	X_3	0	X_4	0	0	0	alle 3-reih. Det. = 0.
	VI.	X_2	X_3	0	0	0	0	0	
	VII.	X_3	X_4	0	0	0	0	0	
3., 3 ausgezeichn. Trfn. X_2f, X_3f, X_4f,	VIII.	X_2	0	0	0	0	0	0	alle 2-reih. Det. = 0.
3., Lauter ausgezeichn. Trfn.	IX.	0	0	0	0	0	0	0	alle 1-reih. Det. = 0.
		(X_0X_1)	(X_0X_2)	(X_0X_3)	(X_1X_2)	(X_1X_3)	(X_2X_3)	(X_iX_4)	

§ 10.

Die Zusammensetzung der 6-gliedrigen Gruppen vom Range Null.

Bei der Bestimmung aller Typen von Zusammensetzungen der G_6 verfahren wir wie früher, indem wir die jedem Typus der G_5 entsprechenden Typen von 6-gliedrigen Gruppen für sich bestimmen.

Typus I. und II. der G_5 fassen wir vorläufig zusammen, indem wir setzen $(X_1X_2) = aX_4$, wo $a = 1$ oder $= 0$; dann haben die entsprechenden 6-gliedrigen Gruppen zunächst folgende Zusammensetzung:

$$(X_0 X_1) = X_2 \quad (X_0 X_2) = X_3 \quad (X_0 X_3) = X_4 \quad (X_0 X_4) = \alpha X_5$$
$$(X_1 X_2) = a X_4 + \beta X_5 \quad (X_1 X_3) = \gamma X_5 \quad (X_1 X_4) = \delta X_5$$
$$(X_2 X_3) = \varepsilon X_5 \quad (X_2 X_4) = \zeta X_5 \quad (X_3 X_4) = \eta X_5 \,.$$

Aus der Jacobi'schen Identität $(X_0 X_1 X_2)$ folgt:

$$(X_0 X_1 X_2) \equiv (-a\alpha + \gamma)\, X_5 \equiv 0\,, \quad \text{also} \quad \gamma = a\alpha\,;$$

ferner giebt

$$(X_0 X_1 X_3) \equiv (\varepsilon + \delta)\, X_5 \equiv 0\,, \quad \text{also} \quad \delta = -\varepsilon$$
$$(X_0 X_1 X_4) \equiv \zeta X_5 \equiv 0\,, \quad \zeta = 0\,, \quad (X_0 X_2 X_4) \equiv \eta X_5 \equiv 0\,, \quad \eta = 0\,,$$

so dass die Zusammensetzung folgende Form annimmt:

$$(X_0 X_1) = X_2 \quad (X_0 X_2) = X_3 \quad (X_0 X_3) = X_4 \quad (X_0 X_4) = \alpha X_5$$
$$(X_1 X_2) = a X_4 + \beta X_5 \quad (X_1 X_3) = a\alpha X_5 \quad (X_1 X_4) = \delta X_5$$
$$(X_2 X_3) = -\delta X_5 \quad (X_2 X_4) = 0 \quad (X_3 X_4) = 0 \quad (X_i X_5) = 0$$
$$i = 0\,, 1 \cdots 4\,.$$

Es ist nunmehr weiter zu untersuchen, ob irgend welche der Constanten α, β, δ durch geeignete Wahl der 6 unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_0 f$, $X_1 f$, $\cdots$ $X_5 f$ der Gruppe bestimmte einfache Werte erhalten können. Um diese Untersuchung systematisch vorzunehmen, erteilen wir den beiden infinitesimalen Transformationen $X_0 f$ und $X_1 f$ die unendlich kleinen Zuwüchse

$$\delta X_0 = \sum_0^5 {}^i\, a_i X_i \delta t\,, \qquad \delta X_1 = \sum_1^5 {}^i\, b_i X_i \delta t$$

wo die a und b beliebige Constanten bedeuten und δt eine unendlich kleine Grösse ist. Die Zuwüchse von $X_2 f$, $X_3 f$, $X_4 f$ sind dann durch die Relationen $(X_0 X_1)$, $(X_0 X_2)$, $(X_0 X_3)$ bestimmt, denn die Variation der infinitesimalen Transformationen muss so erfolgen, dass die von unbestimmten Constanten freien Relationen unverändert bleiben. Dagegen erhalten die Constanten α, β, δ gewisse Zuwüchse $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\delta$, die von den a_i und b_i mit abhängen; es ist dann zu untersuchen, in wie weit durch geeignete Wahl der a_i und b_i bei der Transformation der Wert der Constanten α, β, δ vereinfacht werden kann. Es wird sich zeigen, dass wir in den weitaus meisten Fällen erreichen können, dass die auftretenden unbestimmten Constanten $= 1$ oder $= 0$ werden.

Setzen wir also

$$\delta X_0 = \sum_0^5 {}^i\, a_i X_i \delta t \qquad \delta X_1 = \sum_1^5 {}^i\, b_i X_i \delta t\,,$$

dann wird $\delta X_2 = \delta (X_0 X_1)$; und da $\delta(X_i X_k) = (\delta X_i,\, X_k) + (X_i,\, \delta X_k)$, so ist

$\delta X_2 = [(a_0+b_1)X_2+b_2X_3+(b_3-a_2a)X_4+(b_4\alpha-a_2\beta-a_3\gamma-a_4\delta)X_5]\delta t$
$\delta X_3 = \delta(X_0X_2)=[(2a_0+b_1)X_3+(b_2+a_1a)X_4+(a_1\beta+a_3\delta+(b_3-a_2a)\alpha)X_5]\delta t$
$\delta X_4 = \delta(X_0X_3)=[(3a_0+b_1)X_4+(a_1\gamma-a_2\delta+(b_2+a_1a)\alpha)X_5]\delta t$;
endlich setzen wir $\delta X_5 = e_5 X_5 \delta t$. Dann ergiebt sich weiter

$$\delta(X_0X_4) = (a_0\alpha + a_1\delta + (3a_0 + b_1)\alpha)X_5\,\delta t;$$

andrerseits ist aber

$$\delta(X_0X_4) = \delta(\alpha X_5) = \alpha\cdot\delta X_5 + X_5\delta\alpha = \alpha e_5 X_5 \delta t + X_5\delta\alpha\,.$$

Es muss also die Gleichung bestehen

$$\alpha e_5 X_5 \delta t + X_5 \delta\alpha = (a_0\alpha + a_1\delta + (3a_0 + b_1)\alpha)X_5$$

oder

$$\delta\alpha = [(4a_0 + b_1 - e_5)\alpha + a_1\delta]\delta t\,.$$

Ebenso folgt aus $\delta(X_1X_2)$:

$$\delta\beta = [(a_0 + 2b_1 - e_5)\beta - 2a_1a^2\alpha + 2b_3\delta]\delta t$$

und aus $\delta(X_1X_4)$:

$$\delta\delta = [(3a_0 + 2b_1 - e_5)\delta]\delta t\,.$$

Ausserdem ergiebt sich aus $\delta(X_1X_2)$ noch: $b_1 a = 2a_0 a$.

Wir haben nun die beiden Fälle $a = 1$ und $a = 0$ zu unterscheiden.

1. $a = 1$. Dann ist $b_1 = 2a_0$, und es wird

$$\delta\alpha = (6a_0 - e_5)\alpha + a_1\delta$$
$$\delta\beta = (5a_0 - e_5)\beta - 2a_1\alpha + 2b_3\delta$$
$$\delta\delta = (7a_0 - e_5)\delta\,.$$

Wir erkennen hieraus, dass δ', falls $\delta \neq 0$, den Wert 1 erhalten kann, α' und β' aber für $\delta \neq 0$ beide Null gemacht werden können; ist dagegen $\delta = 0$, und $\alpha \neq 0$, so kann α' immer $= 1$ werden, $\beta' = 0$; ist endlich $\delta = 0$ und $\alpha = 0$, so wird $\beta' = 1$, wenn $\beta \neq 0$.

2. $a = 0$. Dann ist

$$\delta\alpha = (4a_0 + b_1 - e_5)\alpha + a_1\delta$$
$$\delta\beta = (a_0 + 2b_1 - e_5)\beta + 2b_3\delta$$
$$\delta\delta = (3a_0 + 2b_1 - e_5)\delta\,.$$

Hier haben wir wieder zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $\delta \neq 0$; dann wird $\delta' = 1$, $\beta' = 0$ und $\alpha' = 0$.

2. $\delta = 0$. Sind dann α und β beide verschieden von Null, so können α' und β' den Wert 1 erhalten; ebenso kann, wenn eine der beiden Constanten von Null verschieden ist, dieselbe immer $= 1$ gesetzt werden; dazu kommt endlich der Fall, dass α und β von vorn herein Null sind.

Es treten also insgesamt folgende Möglichkeiten auf:

1. $a = 1$.
   - a. $\delta \neq 0; = 1. \quad \alpha = 0; \quad \beta = 0$.
   - b. $\delta = 0; \quad \alpha)\ \alpha \neq 0; \quad = 1. \quad \beta = 0$
     - $\beta)\ \alpha = 0. \quad 1)\ \beta \neq 0; \quad = 1$
     - $2)\ \beta = 0$.

2. $a = 0$.
   - a. $\delta \neq 0; \quad = 1. \quad \alpha = 0; \quad \beta = 0$
   - b. $\delta = 0; \quad \alpha)\ \alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0$, dann beide $= 1$
     - $\beta)\ \alpha = 0, \quad \beta \neq 0$; dann $\beta = 1$
     - $\gamma)\ \alpha \neq 0, \quad \beta = 0$; dann $\alpha = 1$
     - $\delta)\ \alpha = 0. \quad \beta = 0$.

Teilen wir die sich hieraus ergebenden Typen von Zusammensetzungen wieder nach der Zahl der in den entsprechenden Gruppen auftretenden unabhängigen ausgezeichneten Transformationen ein, so ergiebt sich nachstehendes Schema für die den Typen I und II der G_5 entsprechenden 6-gliedrigen Gruppen:

1., Nach 5^{I}.

	$(X_0 X_1)$	$(X_0 X_2)$	$(X_0 X_3)$	$(X_0 X_4)$	$(X_1 X_2)$	$(X_1 X_3)$	$(X_1 X_4)$	$(X_2 X_3)$		
1 ausgez. Trf. $X_5 f$	X_2	X_3	X_4	X_5	X_4	X_5	0	0	$b_1 = 2a_0$	$\delta\alpha = (6a_0 - e_5)\alpha + a_1\delta$
	X_2	X_3	X_4	0	X_1	0	X_5	$-X_5$		$\delta\beta = (5a_0 - e_5)\beta - 2a_1\alpha + 2b_3\delta$
2 ausgez. Trfn. X_1, X_5	X_2	X_3	X_4	0	$X_1 + X_5$	0	0	0		$\delta\delta = (7a_0 - e_5)\delta$
	X_2	X_3	X_4	0	X_1	0	0	0		

2., Nach 5^{II}.

	$(X_0 X_1)$	$(X_0 X_2)$	$(X_0 X_3)$	$(X_0 X_4)$	$(X_1 X_2)$	$(X_1 X_3)$	$(X_1 X_4)$	$(X_2 X_3)$		
1 ausgez. Trf. $X_5 f$	X_2	X_3	X_4	X_5	X_5	0	0	0	—	$\delta\alpha = (4a_0 + b_1 - e_5)\alpha + a_1\delta$
	X_2	X_3	X_4	X_5	0	0	0	0		$\delta\beta = (a_0 + 2b_1 - e_5)\beta + 2b_3\delta$
	X_2	X_3	X_4	0	0	0	X_5	$-X_5$		$\delta\delta = (3a_0 + 2b_1 - e_5)\delta$
2 ausgez. Trfn. X_1, X_5	X_2	X_3	X_4	0	X_5	0	0	0		
	X_2	X_3	X_4	0	0	0	0	0		

Für alle hier aufgeführten Typen gelten ferner noch die Relationen

$$(X_2 X_4) = (X_3 X_4) = 0 \quad (X_i X_5) = 0, \quad i = 0, 1 \cdots 4$$

Die bei den 5-gliedrigen Gruppen dem Schema beigefügten Bemerkungen über das Verhalten der Unterdeterminanten in den zugehörigen charakteristischen Gleichungen sind, als von geringem Werte, hier weggelassen worden und werden auch im Folgenden nicht gegeben; dagegen erschien es zweckmässig, die bei den Variationen der infinitesimalen Transformationen etwa auftretenden Bedingungen zwischen den Variations-Parametern (z. B. bei 1. $b_1 = 2a_0$) sowie die Werte der Zuwüchse der unbestimmten Constanten ($\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\delta$) dem Schema beizufügen.

Die Bestimmung aller weiteren Typen von Zusammensetzungen geschieht durch wesentlich gleiche Operationen; es wird daher genügen, die Rechnungen für diesen einen, vorstehenden Fall in allen Einzelheiten durchgeführt und erläutert zu haben; wir beschränken uns im Folgenden auf die schematische Darstellung der Substitutionen, der daraus entspringenden Werte für die Zuwüchse der unbestimmten Constanten und der etwaigen Relationen zwischen den Parametern der Variationen, um schliesslich die Typen in einem Schema zusammenzufassen.

Die dem Typus III der G_5 entsprechenden 6-gliedrigen Gruppen haben zunächst die folgende Zusammensetzung:

$$(X_0 X_1) = X_2 \quad (X_0 X_2) = X_4 \quad (X_0 X_3) = \alpha X_5 \quad (X_0 X_4) = \beta X_5$$
$$(X_1 X_2) = \gamma X_5 \quad (X_1 X_3) = X_4 + \delta X_5 \quad (X_1 X_4) = \varepsilon X_5 = 0$$
$$(X_2 X_3) = \eta X_5 = \beta X_5 \quad (X_2 X_4) = \vartheta X_5 = 0$$
$$(X_3 X_4) = \varkappa X_5 = 0 .$$

Der Werte $\varkappa = \vartheta = \varepsilon = 0 \quad \eta = \beta$ folgen aus der Jacobischen Identität $(X_i X_k X_j) \equiv 0$.

Wir setzen nun

$$\delta X_0 = \sum_0^4{}^i a_i X_i \delta t \quad \delta X_1 = \sum_1^4{}^i b_i X_i \delta t$$
$$\delta X_3 = (c_3 X_3 + c_4 X_4) \delta t \quad \delta X_5 = e_5 X_5 \delta t ,$$

dann folgt

$$\delta X_2 = \delta (X_0 X_1) = [(a_0 + b_1) X_2 + (b_2 - a_3) X_4 + (b_3 \alpha + b_4 \beta - a_2 \gamma - a_3 \delta) X_5] \delta t ,$$
$$\delta X_4 = \delta (X_0 X_2) = [(2 a_0 + b_1) X_4 + (a_1 \gamma - a_3 \beta + (b_2 - a_3) \beta) X_5] \delta t ,$$

ferner

$$\delta (X_0 X_3) = [a_1 X_4 + (a_0 \alpha + a_1 \delta + a_2 \beta + c_3 \alpha + c_4 \beta) X_5] \delta t .$$

Andrerseits ist

$$\delta (X_0 X_3) = (\alpha e_5 \delta t + \delta \alpha) X_5 ,$$

es muss also sein

$$a_1 X_4 + ((a_0 + c_3) \alpha + (a_2 + c_4) \beta + a_1 \delta) X_5 \equiv (\alpha e_5 + \delta \alpha) X_5 ;$$

daraus folgt

$$a_1 = 0 , \quad \delta \alpha = (a_0 + c_3 - e_5) \alpha + (a_2 + c_4) \beta .$$

[Der Faktor δt soll im Folgenden, als selbstverständlich, immer weggelassen werden.]

Analog finden wir

$$\delta \beta = (3 a_0 + b_1 - e_5) \beta$$
$$\delta \gamma = (a_0 + 2 b_1 - e_5) \gamma - b_3 \beta$$
$$c_3 = 2 a_0 \quad \delta \delta = (b_1 + 2 a_0 - e_5) \delta - 2 a_3 \beta .$$

Somit ergeben sich die folgenden Typen:

Nach 5 III.

	$(X_0 X_1)$	$(X_0 X_2)$	$(X_0 X_3)$	$(X_0 X_4)$	$(X_1 X_2)$	$(X_1 X_3)$	$(X_2 X_3)$	$(X_1 X_4)$ $(X_2 X_4)$ $(X_3 X_4)$ $(X_i X_5)$		
1 ausg. Trf., X_5	X_2	X_4	0	X_5	0	X_4	X_5	0		
2 ausgez. Trfn. X_4, X_5	X_2	X_4	X_5	0	X_5	$X_4+\delta X_5$	0	0		
	X_2	X_4	X_5	0	0	X_4+X_5	0	0		$\delta\alpha=(3a_0-e_5)\alpha+(a_2+c_1)\beta$
	X_2	X_4	X_5	0	0	X_4	0	0	$a_1=0$	$\delta\beta=(3a_0+b_1-e_5)\beta$
	X_2	X_4	0	0	X_5	X_4	0	0	$c_3=2a_0$	$\delta\gamma=(a_0+2b_1-e_5)\gamma-b_3\beta$
	X_2	X_4	0	0	0	X_4+X_5	0	0		$\delta\delta=(b_1+2a_0-e_5)\delta-2a_3\beta$
	X_2	X_4	0	0	X_5	X_4+X_5	0	0		
	X_2	X_4	0	0	0	X_4	0	0		

Dem Typus IV der G_5, den wir in der Form schreiben können:

$$(X_0 X_1) = X_4 \quad (X_2 X_3) = X_4, \quad \text{alle andern} \quad (X_i X_k) = 0 ,$$

entspricht die Zusammensetzung

$$(X_0 X_1) = X_4 \quad (X_0 X_2) = \alpha X_5 \quad (X_0 X_3) = \beta X_5 \quad (X_0 X_4) = \gamma X_5 = 0 .$$
$$(X_1 X_2) = \delta X_5 \quad (X_1 X_3) = \varepsilon X_5 \quad (X_1 X_4) = \zeta X_5 = 0$$
$$(X_2 X_3) = X_4 + \eta X_5 \quad (X_2 X_4) = \vartheta X_5 = 0$$
$$(X_3 X_4) = \varkappa X_5 = 0 .$$

Die Werte $\gamma = \zeta = \vartheta = k = 0$ ergeben sich unmittelbar aus der Jacobischen Identität.

Wir setzen

$$\delta X_0 = \sum_0^4 a_i X_i \quad \delta X_1 = \sum_0^4 b_i X_i$$

$$\delta X_2 = c_2 X_2 + c_3 X_3 + c_4 X_4 \quad \delta X_3 = d_2 X_2 + d_3 X_3 + d_4 X_4$$

$$\delta X_4 = \delta (X_0 X_1) = (a_0 + b_1) X_4 + (b_2 \alpha + b_3 \beta - a_2 \delta - a_3 \varepsilon) X_5 \quad \delta X_5 = e_5 X_5 .$$

Daraus folgt

$$b_2 = b_3 = a_2 = a_3 = 0 \quad c_2 + d_3 = a_0 + b_1$$
$$\delta\alpha = (a_0 + c_2 - e_5)\alpha + c_3 \beta + a_1 \delta \quad \delta\beta = (2a_0 + b_1 - c_2 - e_5)\beta + d_2 \alpha + a_1 \varepsilon$$
$$\delta\delta = (b_1 + e_2 - e_5)\delta + b_0 \alpha + c_3 \varepsilon \quad \delta\varepsilon = (b_1 + d_3 - e_5)\varepsilon + b_0 \beta + d_2 \delta$$
$$\delta\eta = (a_0 + b_1 - e_5)\eta ,$$

wir erhalten sonach die folgenden Typen:

Nach 5^{IV}.

	$(X_0 X_1)$	$(X_0 X_2)$	$(X_0 X_3)$	$(X_1 X_2)$	$(X_1 X_3)$	$(X_2 X_3)$	$(X_i X_4)$ $(X_i X_5)$		
2 ausgez. Trfn., X_4, X_5,	X_4	0	X_5	δX_5	0	X_4+AX_5	0	$b_2=b_3=0$ $a_2=a_3=0$ $c_2+d_3=a_0+b_1$	$\delta\alpha=(a_0+c_2-e_5)\alpha+c_3\beta+a_1\delta$ $\delta\beta=(2a_0+b_1-c_2-e_5)\beta+d_2\alpha+a_1\varepsilon$ $\delta\delta=(b_1+c_2-e_5)\delta+b_0\alpha+c_3\varepsilon$ $\delta\varepsilon=(b_1+d_3-e_5)\varepsilon+b_0\beta+d_2\delta$ $\delta\eta=(a_0+b_1-e_5)\eta$
	X_4	0	0	X_5	0	X_4+AX_5	0		
	X_4	X_5	0	0	εX_5	X_4+AX_5	0		
	X_4	0	0	0	X_5	X_4+AX_5	0		
	X_4	0	0	0	0	X_4+AX_5	0		

$A = 1$ oder $= 0$; wenn $A = 0$, dann $\delta = 1$, $\varepsilon = 1$.

Dem Typus V der G_5 entspricht folgende Zusammensetzung:

$$(X_0 X_1) = X_2 \quad (X_0 X_2) = X_3 \quad (X_0 X_3) = \alpha X_5 \quad (X_0 X_4) = \beta X_5$$
$$(X_1 X_2) = X_4 \quad (X_1 X_3) = \delta X_5 = \beta X_5 \quad (X_1 X_4) = \varepsilon X_5$$
$$(X_2 X_3) = (\zeta X_5) \quad (X_2 X_4) = (\eta X_5) \quad (X_3 X_4) = (\vartheta X_5)$$
$$(X_i X_5) = 0 .$$

ϑ, η und ζ müssen infolge der Jacobischen Identität Null werden, was oben durch (ϑX_5) etc. angedeutet sein soll; ebenso verlangt die Jacobische Identität, dass $\delta = \beta$ wird.

Wir setzen

$$\delta X_0 = \sum_0^4 a_i X_i \quad \delta X_1 = \sum_1^4 b_i X_i \quad \delta X_5 = e_5 X_5;$$

dann wird

$$\delta X_2 = \delta(X_0 X_1) = (a_0 + b_1) X_2 + b_2 X_3 - a_2 X_4 + (b_3\alpha + b_4\beta - a_3\beta - a_4\varepsilon) X_5$$
$$\delta X_3 = \delta(X_0 X_2) = (2a_0 + b_1) X_3 + a_1 X_4 + (b_2\alpha - a_2\beta) X_5$$
$$\delta X_4 = \delta(X_1 X_2) = (a_0 + 2b_1) X_4 + (b_2\beta - a_2\varepsilon) X_5 ,$$

Für $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\varepsilon$ ergeben sich die Werte:

$$\delta\alpha = (3a_0 + b_1 - e_5)\alpha + 2a_1\beta \quad \delta\beta = (2(a_0 + b_1) - e_5)\beta + a_1\varepsilon \quad \delta\varepsilon = (a_0 + 3b_1 - e_5)\varepsilon,$$

es ergeben sich also die folgenden Typen:

Nach 5^{V}.

	$(X_0 X_1)$	$(X_0 X_2)$	$(X_0 X_3)$	$(X_0 X_4)$	$(X_1 X_2)$	$(X_1 X_3)$	$(X_1 X_4)$	$(X_2 X_3)$ $(X_2 X_4)$ $(X_3 X_4)$ $(X_i X_5)$	
1 ausgezeichnete Transf. X_5	X_2	X_3	X_5	0	X_4	0	X_5	0	$\delta\alpha=(3a_0+b_1-e_5)\alpha+2a_1\beta$ $\delta\beta=[2(a_0+b_1)-e_5]\beta+a_1\varepsilon$ $\delta\varepsilon=(a_0+3b_1-e_5)\varepsilon$
	X_2	X_3	0	X_5	X_4	X_5	0	0	
2 ausgezeichnete Transf. X_4, X_5	X_2	X_4	0	0	X_3	X_5	0	0	
	X_2	X_3	X_5	0	X_4	0	0	0	
3 ausgezeichnete Transf. X_3, X_4, X_5	X_2	X_3	0	0	X_4	0	0	0	

Dem Typus VI der G_5 entspricht die folgende Zusammensetzung:

$$(X_0 X_1) = X_2 \quad (X_0 X_2) = X_3 \quad (X_0 X_3) = \alpha X_5 \quad (X_0 X_4) = \beta X_5$$
$$(X_1 X_2) = \gamma X_5 \quad (X_1 X_3) = (\delta X_5) \quad (X_2 X_3) = (\varepsilon X_5)$$
$$(X_1 X_4) = \zeta X_5 \quad (X_2 X_4) = (\eta X_5) \quad (X_3 X_4) = (\vartheta X_5)$$
$$(X_i X_5) = 0 \,.$$

Das Verschwinden von δ, ε, η, ϑ fordert die Jacobische Identität. Setzen wir

$$\delta X_0 = \sum_0^4 {}^i a_i X_i \quad \delta X_1 = \sum_1^4 {}^i b_i X_i$$
$$\delta X_4 = c_3 X_3 + c_4 X_4 \quad \delta X_5 = e_5 X_5 \,,$$

so wird

$$\delta X_2 = \delta (X_0 X_1) = (a_0 + b_1) X_2 + b_2 X_3 + (b_3 \alpha + b_4 \beta - a_2 \gamma - a_4 \zeta) X_5$$
$$\delta X_3 = \delta (X_0 X_2) = (2 a_0 + b_1) X_3 + (a_1 \gamma + b_2 \alpha) X_5 \,,$$

und dann ist

$$\delta \alpha = (3 a_0 + b_1 - e_5) \alpha \quad \delta \beta = (a_0 + c_4 - e_5) \beta + a_1 \zeta + c_3 \alpha$$
$$\delta \gamma = (a_0 + 2 b_1 - e_5) \gamma \quad \delta \zeta = (b_1 + c_4 - e_5) \zeta \,.$$

Ist hier im Besondern $\alpha = 0$, $\zeta \neq 0$, so kann ζ immer den Wert 1 erhalten; β kann stets $= 0$ gemacht werden und $\gamma = 1$, wenn es nicht an sich Null ist; ist dagegen auch $\zeta = 0$ und $\beta \neq 0$, dann wird $\beta = 1$; ist auch $\gamma \neq 0$, so kann es gleichfalls $= 1$ gemacht werden; diesen Fällen entsprechen die folgenden Typen:

1. $(X_0 X_1) = X_2 \quad (X_0 X_2) = X_3 \quad (X_1 X_2) = X_5 \quad (X_1 X_4) = X_5$
2. $(X_0 X_1) = X_2 \quad (X_0 X_2) = X_3 \quad (X_1 X_2) = 0 \quad (X_1 X_4) = X_5$
3. $(X_0 X_1) = X_2 \quad (X_0 X_2) = X_3 \quad (X_0 X_4) = X_5 \quad (X_1 X_2) = X_5$
4. $(X_0 X_1) = X_2 \quad (X_0 X_2) = X_3 \quad (X_0 X_4) = X_5 \quad (X_1 X_2) = 0$;

alle übrigen $(X_i X_k) = 0$.

Durch die Substitution

$$X_0' = X_0 \quad X_1' = X_1 \quad X_2' = X_2 \quad X_3' = X_4 \quad X_4' = X_3 \quad X_5' = X_5$$

erreichen wir, dass alle $(X_i X_4) = (X_i X_5) = 0$ werden, dass also X_4 und X_5 die ausgezeichneten Transformationen sind; diese Darstellung ist deshalb empfehlenswerter, weil sich dann leichter erkennen lässt, ob die einzelnen Typen wirklich wesentlich verschieden von einander sind. Durch diese Substitution gehen die betrachteten Typen über in bez.

1'. $(X_0 X_1) = X_2 \quad (X_0 X_2) = X_4 \quad (X_1 X_2) = X_5 \quad (X_1 X_3) = X_5$
2'. $(X_0 X_1) = X_2 \quad (X_0 X_2) = X_4 \quad (X_1 X_2) = 0 \quad (X_1 X_3) = X_5$
3'. $(X_0 X_1) = X_2 \quad (X_0 X_2) = X_4 \quad (X_0 X_3) = X_5 \quad (X_1 X_2) = X_5$
4'. $(X_0 X_1) = X_2 \quad (X_0 X_2) = X_4 \quad (X_0 X_3) = X_5 \quad (X_0 X_4) = 0$,

alle übrigen $(X_i X_k) = 0$.

Insgesamt entsprechen dem Typus VI der G_5 die folgenden 6-gliedrigen Gruppen:

Nach 5^{VI}.

	$(X_0 X_1)$	$(X_0 X_2)$	$(X_0 X_3)$	$(X_0 X_4)$	$(X_1 X_2)$	$(X_1 X_3)$	$(X_1 X_4)$	$(X_2 X_3)$	$(X_2 X_4)$ $(X_3 X_4)$ $(X_i X_5)$	,
1 ausg. Trf., X_5.	X_2	X_3	X_5	0	X_5	0	X_5	0	0	
	X_2	X_3	X_5	0	0	0	X_5	0	0	
2 ausgez. Trfn., X_4, X_5.	X_2	X_3	X_5	0	X_5	0	0	0	0	
	X_2	X_4	0	0	X_5	X_5	0	0	0	$\delta\alpha=(3a_0+b_1-e_5)\alpha$
	X_2	X_4	0	0	0	X_5	0	0	0	$\beta\delta=(a_0+c_4-e_5)\beta + a_1\zeta+c_3\alpha$
	X_2	X_4	X_5	0	X_5	0	0	0	0	$\delta\gamma=(a_0+2b_1-e_5)\gamma$
	X_2	X_4	X_5	0	0	0	0	0	0	$\delta\zeta=(b_1+c_4-e_5)\zeta$
	X_2	X_3	X_5	0	0	0	0	0	0	
3 ausgez. Trfn., X_3, X_4, X_5.	X_2	X_3	0	0	X_5	0	0	0	0	
	X_2	X_3	0	0	0	0	0	0	0	

Dem Typus VII der G_5 entspricht die folgende Zusammensetzung:

$$(X_0 X_1) = X_3 \quad (X_0 X_2) = X_4 \quad (X_0 X_3) = \alpha X_5 \quad (X_0 X_4) = \beta X_5$$
$$(X_1 X_2) = \gamma X_5 \quad (X_1 X_3) = \delta X_5 \quad (X_1 X_4) = \varepsilon X_5$$
$$(X_2 X_3) = \eta X_5 = \varepsilon X_5 \quad (X_2 X_4) = \vartheta X_5 \quad (X_3 X_4) = (\varkappa X_5)$$
$$(X_i X_5) = 0 .$$

Aus der Jacobischen Identität folgt $\varkappa = 0$, $\eta = \varepsilon$. Wir setzen

$$\delta X_0 = \sum_0^4{}^i a_i X_i \qquad \delta X_1 = \sum_1^4{}^i b_i X_i$$

$$\delta X_2 = c_2 X_2 + c_3 X_3 + c_4 X_4 \qquad \delta X_5 = e_5 X_5$$

$$\delta X_3 = \delta(X_0 X_1) = (a_0 + b_1) X_3 + b_2 X_4 + (b_3 \alpha + b_4 \beta - a_2 \gamma - a_3 \delta - a_4 \varepsilon) X_5$$
$$\delta X_4 = \delta(X_0 X_2) = (a_0 + c_2) X_4 + (a_1 \gamma - a_3 \varepsilon - a_4 \vartheta + c_3 \alpha + c_4 \beta) X_5 ,$$

dann wird

$$\delta\alpha = (2a_0 + b_1 - e_5)\alpha + b_2\beta + a_1\delta + a_2\varepsilon \quad \delta\beta = (2a_0 + c_2 - e_5)\beta + a_1\varepsilon + a_2\vartheta$$
$$\delta\gamma = (b_1 + c_2 - e_5)\gamma + c_3\delta + (c_4 - b_3)\varepsilon - b_4\vartheta \quad \delta\delta = (a_0 + 2b_1 - e_5)\delta + 2b_2\varepsilon$$
$$\delta\varepsilon = (a_0 + b_1 + c_2 - e_5)\varepsilon + b_2\vartheta \quad \delta\vartheta = (a_0 + 2c_2 - e_5)\vartheta .$$

Bei Berücksichtigung aller hier auftretenden Möglichkeiten zeigt sich, dass wir nicht lauter wesentlich verschiedne Typen erhalten; der

Kürze halber übergehen wir diese Zwischenrechnung; es ergeben sich schliesslich die folgenden Typen:

Nach 5^{VII}.

	$(X_0 X_1)$	$(X_0 X_2)$	$(X_0 X_3)$	$(X_0 X_4)$	$(X_1 X_2)$	$(X_1 X_3)$	$(X_1 X_4)$	$(X_2 X_3)$	$(X_2 X_4)$	$(X_3 X_4)$ $(X_i X_5)$
1 ausg. Trf., X_5.	X_3	X_4	X_5	0	0	0	0	0	X_5	0
	X_3	X_4	0	0	0	X_5	0	0	X_5	0
	X_3	X_4	0	0	0	0	X_5	X_5	0	0
	X_3	X_4	0	X_5	0	X_5	0	0	0	0
2 ausgez. Trfn., X_4, X_5	X_3	X_4	X_5	0	$\pm X_5$	0	0	0	0	0
	X_3	X_4	0	0	0	X_5	0	0	0	0
	X_3	X_4	X_5	0	0	0	0	0	0	0
3 ausgez. Trfn., X_3, X_4, X_5.	X_3	X_4	0	0	X_5	0	0	0	0	0
	X_3	X_4	0	0	0	0	0	0	0	0

Dem Typus VIII der G_5 entspricht die folgende Zusammensetzung:

$$(X_0 X_1) = X_2 \quad (X_0 X_2) = \alpha X_5 \quad (X_0 X_3) = \beta X_5 \quad (X_0 X_4) = \gamma X_5$$
$$(X_1 X_2) = \delta X_5 \quad (X_1 X_3) = \varepsilon X_5 \quad (X_1 X_4) = \zeta X_5$$
$$(X_2 X_3) = (\eta X_5) \quad (X_2 X_4) = (\vartheta X_5) \quad (X_3 X_4) = \varkappa X_5$$
$$(X_i X_5) = 0 \,.$$

Das Verschwinden von η und ϑ fordert die Jacobische Identität. Wir setzen

$$\delta X_0 = \sum_0^4{}^i a_i X_i \qquad \delta X_1 = \sum_0^4{}^i b_i X_i$$

$$\delta X_3 = c_2 X_2 + c_3 X_3 + c_4 X_4 \quad \delta X_4 = d_2 X_2 + d_3 X_3 + d_4 X_4 \quad \delta X_5 = e_5 X_5 \,,$$

dann ist

$$\delta X_2 = \delta (X_0 X_1) = (a_0 + b_1) X_2 + (b_2 \alpha + b_3 \beta + b_4 \gamma - a_2 \delta - a_3 \varepsilon - a_4 \zeta) X_5$$

und es ergiebt sich

$$\begin{aligned}
\delta \alpha &= (2 a_0 + b_1 - e_5) \alpha + a_1 \delta \\
\delta \beta &= (a_0 + c_3 - e_5) \beta + c_2 \alpha + c_4 \gamma + a_1 \varepsilon - a_4 \varkappa \\
\delta \gamma &= (a_0 + d_4 - e_5) \gamma + d_2 \alpha + d_3 \beta + a_1 \zeta + a_3 \varkappa \\
\delta \delta &= (a_0 + 2 b_1 - e_5) \delta + b_0 \alpha \\
\delta \varepsilon &= (b_1 + c_3 - e_5) \varepsilon + c_2 \delta + c_4 \zeta - b_4 \varkappa \\
\delta \zeta &= (b_1 + d_4 - e_5) \zeta + d_2 \delta + d_3 \varepsilon + b_3 \varkappa \\
\delta \varkappa &= (c_3 + d_4 - e_5) \varkappa \,.
\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass in unsrem Falle die Relationen unverändert bleiben, wenn wir X_0 mit X_1 oder X_3 mit X_4 vertauschen; dementsprechend sind auch die Werte $\delta\alpha$, $\delta\beta \cdots \delta\varkappa$ vollständig symmetrisch in Bezug auf α und δ, β und γ, ε und ζ. Daraus ergiebt sich, dass wir keine verschiednen Typen erhalten, wenn wir unter sonst gleichen Bedingungen einmal $\alpha \neq 0$, $\delta = 0$ und dann $\alpha = 0$, $\delta \neq 0$ annehmen, oder $\beta \neq 0$, $\gamma = 0$ und $\beta = 0$, $\gamma \neq 0$, oder endlich $\varepsilon \neq 0$ $\zeta = 0$ und $\varepsilon = 0$ $\zeta \neq 0$; beachten wir dies, so bleiben noch folgende Typen als wesentlich verschieden:

Nach 5^{VIII}.

	(X_0X_1)	(X_0X_2)	(X_0X_3)	(X_0X_4)	(X_1X_2)	(X_1X_3)	(X_1X_4)	(X_2X_3)	(X_3X_4)	(X_2X_4) (X_iX_5)
1 ausgez. Trf., X_5.	X_2	0	0	0	X_5	0	0	0	X_5	0
2 ausgez. Trfn., X_4, X_5.	X_4	0	0	0	0	0	0	X_5	0	0
	X_2	0	X_5	0	X_5	0	0	0	0	0
	X_2	X_5	0	0	0	X_5	0	0	0	0
	X_4	X_5	0	0	0	X_5	0	0	0	0
3 ausgez. Trfn.	X_2	0	0	0	X_5	0	0	0	0	0
	X_3	X_5	0	0	0	0	0	0	0	0
4 ausgez. Trfn.	X_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Endlich sind noch zu Typus IX der G_5 die entsprechenden Zusammensetzungen von 6-gliedrigen Gruppen zu bestimmen.

Nach § 8 erhalten wir die folgenden Fälle:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ c_{02} = c_{13} = 1 \\ 2.\ c_{01} = 1 \end{array}\right\} \text{ die übrigen } c_{ik} = 0\,.$$

$$3.\ \text{alle } c_{ik} = 0\,.$$

2. wird identisch mit Typus VIII des letzten Schemas, wenn wir X_2 mit X_5 vertauschen, also erhalten wir nur die beiden Fälle:

	(X_0X_1)	(X_0X_2)	(X_0X_3)	(X_0X_4)	(X_1X_2)	(X_1X_3)	(X_1X_4)	(X_2X_3)	(X_2X_4)	(X_3X_4) (X_iX_5)
2 ausgez. Trfn.	0	X_5	0	0	0	X_5	0	0	0	0
Lauter ausgez. Trfn.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Eine genauere Vergleichung sämtlicher Typen lässt erkennen, dass einige derselben nicht wesentlich verschieden sind; wir übergehen diese Rechnung und geben zum Schlusse eine Übersicht aller Typen von Zusammensetzungen 6-gliedriger Gruppen.

1. Gruppen mit *einer* ausgezeichneten Transformation, $X_5 f$.

	$(X_0 X_1)$	$(X_0 X_2)$	$(X_0 X_3)$	$(X_0 X_4)$	$(X_1 X_2)$	$(X_1 X_3)$	$(X_1 X_4)$	$(X_2 X_3)$	$(X_2 X_4)$	$(X_3 X_4)$
1.	X_2	X_3	X_4	X_5	X_4	X_5	0	0	0	0
2.	X_2	X_3	X_4	0	X_4	0	X_5	$-X_5$	0	0
3.	X_2	X_3	X_4	X_5	X_5	0	0	0	0	0
4.	X_2	X_3	X_4	X_5	0	0	0	0	0	0
5.	X_2	X_3	X_4	0	0	0	X_5	$-X_5$	0	0
6.	X_2	X_3	X_4	0	X_4	0	X_5	0	0	0
7.	X_2	X_3	0	X_5	X_4	X_5	0	0	0	0
8.	X_2	X_3	X_5	0	X_5	0	X_5	0	0	0
9.	X_2	X_3	X_5	0	0	0	X_5	0	0	0
10.	X_2	X_4	0	X_5	0	X_4	0	X_5	0	0
11.	X_2	0	0	0	X_5	0	0	0	0	X_5
12.	X_3	X_4	X_5	0	0	0	0	0	X_5	0
13.	X_3	X_4	0	0	0	X_5	0	0	X_5	0
14.	X_3	X_4	0	0	0	0	X_5	X_5	0	0
15.	X_3	X_4	0	X_5	0	X_5	0	0	0	0
	$(X_0 X_1)$	$(X_0 X_2)$	$(X_0 X_3)$	$(X_0 X_4)$	$(X_1 X_2)$	$(X_1 X_3)$	$(X_1 X_4)$	$(X_2 X_3)$	$(X_2 X_4)$	$(X_3 X_4)$

2. Gruppen mit 2 ausgezeichneten Transformationen, $X_4 f$, $X_5 f$.

	$(X_0 X_1)$	$(X_0 X_2)$	$(X_0 X_3)$	$(X_1 X_2)$	$(X_1 X_3)$	$(X_2 X_3)$	$(X_i X_4)$	$(X_i X_5)$
1.	X_2	X_3	X_4	X_4+X_5	0	0	0	0
2.	X_2	X_3	X_4	X_4	0	0	0	0
3.	X_2	X_3	X_4	X_5	0	0	0	0
4.	X_2	X_3	X_4	0	0	0	0	0
5.	X_2	X_4	X_5	X_5	$X_4+\delta X_5$	0	0	0
6.	X_2	X_4	X_5	0	X_4+X_5	0	0	0
7.	X_2	X_4	X_5	0	X_4	0	0	0
8.	X_2	X_4	0	X_5	X_4	0	0	0
9.	X_2	X_4	0	0	X_4+X_5	0	0	0
10.	X_2	X_4	0	X_5	X_4+X_5	0	0	0
11.	X_2	X_4	0	0	X_4	0	0	0
12.	X_4	0	X_5	δX_5	0	X_4+AX_5	0	0
13.	X_4	0	0	X_5	0	X_4+AX_5	0	0
14.	X_4	X_5	0	0	εX_5	X_4+AX_5	0	0
15.	X_4	0	0	0	X_5	X_4+AX_5	0	0
16.	X_4	0	0	0	0	X_4+AX_5	0	0

(Zu 12.–16.:) $A=1$ oder $=0$; wenn $A=0$, dann $\delta=1$, $\varepsilon=1$.

	(X_0X_1)	(X_0X_2)	(X_0X_3)	(X_1X_2)	(X_1X_3)	(X_2X_3)	(X_iX_4)	(X_iX_5)
17.	X_2	X_4	0	X_3	X_5	0	0	0
18.	X_3	X_4	X_5	X_5	0	0	0	0
19.	X_3	X_4	0	0	X_5	0	0	0
20.	X_3	X_4	X_5	0	0	0	0	0
21.	X_2	X_3	X_5	X_5	0	0	0	0
22.	X_2	X_4	0	X_5	X_5	0	0	0
23.	X_2	X_4	0	0	X_5	0	0	0
24.	X_2	X_4	X_5	X_5	0	0	0	0
25.	X_2	X_4	X_5	0	0	0	0	0
26.	X_4	0	0	0	0	X_5	0	0
27.	X_2	0	X_5	X_5	0	0	0	0
28.	X_4	X_5	0	0	X_5	0	0	0

3. Gruppen mit 3 ausgezeichneten Transformationen X_3, X_4, X_5.

1.	X_2	X_3	0	X_4	0	0	0	0
2.	X_2	X_3	0	0	0	0	0	0
3.	X_3	X_4	0	X_5	0	0	0	0
4.	X_3	X_4	0	0	0	0	0	0

4. Gruppen mit 4 ausgezeichneten Transformationen $X_2 \cdots X_5$.

	X_2	0	0	0	0	0	0	0

5. Gruppen mit lauter ausgezeichneten Transformationen.

	0	0	0	0	0	0	0	0

C. Bestimmung aller Typen von Zusammensetzungen der G_7 bis G_9 vom Range Null, bei welchen $(X_0X_k) = X_{k+1}$.

§ 11.

Allgemeines. 7-gliedrige Gruppen vom Range Null.

Wir beschränken uns im Folgenden auf die Bestimmung der Zusammensetzung solcher $(r+1)$-gliedriger Gruppen vom Range Null, deren $(r+1)$ unabhängige, infinitesimale Transformationen X_0f, X_1f, $\cdots X_rf$ so gewählt werden können, dass die Relationen bestehen

$$(1) \qquad (X_0 X_k) = X_{k+1}\,, \quad k = 1 \cdots r-1\,; \quad (X_0 X_r) = 0\,.$$

Nach den Ausführungen des § 8 erhalten dann die übrigen Relationen die Form

(2) $$(X_i X_k) = [X_{i+k} \cdots X_r] .$$

Wir machen ferner die Annahme, dass die Gruppe immer eine oder mehrere solcher infinitesimaler Transformationen:

$$X_0 + \sum_1^r {}^k \mu_k X_k$$

enthalte, welche ausser mit X_r mit keiner zweiten, von X_r unabhängigen infinitesimalen Transformation der Gruppe vertauschbar seien, wie wir auch die μ_k wählen mögen. Unter diesen Voraussetzungen werden wir beweisen, dass auch alle $c_{1kk+1} = 0$ sein müssen. Wäre nämlich zunächst

$$(X_1 X_{r-1}) = c_{1r-1r} X_r , \quad \text{wo} \quad c_{1r-1r} \neq 0 ,$$

so könnten wir setzen

$$X_0' = X_0 + \lambda X_1$$

dann würde

$$(X_0' X_{r-1}') = X_r' + \lambda c_{1r-1r} X_r'$$

werden, also könnte λ immer so bestimmt werden, dass

$$(X_0' X_{r-1}') = 0 ,$$

was wir eben ausschliessen wollen.

Ebenso muss $c_{1r-2r-1} = 0$ sein; wäre es verschieden von Null, so würde in der r-gliedrigen (mod. X_r) isomorphen Gruppe $X_0 f$, $X_1 f$, $\cdots X_{r-1} f$ für X_0 gesetzt werden können

$$X_0' = X_0 + \mu X_1 ,$$

und es würde dann

$$(X_0' X_{r-2}') = X_{r-1}' + \mu c_{1r-2r-1} X_{r-1}'$$

werden, also μ immer so zu wählen sein, dass $(X_0' X_{r-2}') = 0$ würde. Ebenso müssen $c_{1r-3r-2} = 0$, $c_{1r-4r-3} = 0$, $\cdots$ $c_{123} = 0$ sein, also gilt

(3) $$c_{1kk+1} = 0 \quad k = 1 \cdots r-1 .$$

Wir bilden nun die Jacobische Identität

$$(X_0 X_1 X_{r-2}) \equiv (X_2 X_{r-2}) + c_{1r-2r-1} (X_{r-1} X_0) + (X_1 X_{r-1}) \equiv 0 .$$

Nach (3) ist $c_{1r-2r-1} = c_{1r-1r} = 0$, nach (2) wird $(X_2 X_{r-2}) = c_{2r-2r} X_r$, es ergiebt sich also $c_{2r-2r} = 0$.

Ferner ist

$$(X_0 X_1 X_{r-k}) \equiv (X_2 X_{r-k}) + ((X_1 X_{r-k}) X_0) + (X_1 X_{r-k+1}) \equiv 0 ,$$

und da $(X_1 X_{r-k})$ und $(X_1 X_{r-k+1})$ höchstens von $X_{r-k+2} \cdots X_r$ bez. $X_{r-k+3} \cdots X_r$ abhängt, so ist

$$(X_2 X_{r-k}) = [X_{r-k+3} \cdots\cdots X_r] ,$$

also sind auch alle $c_{2kk+2} = 0$, $k = 3 \cdots\cdots r-2$. Ebenso giebt

$$(X_0 X_2 X_{r-k}) = (X_3 X_{r-k}) + [X_{r-k+4} \cdots X_r] \equiv 0$$
$$(X_3 X_{r-k}) = [X_{r-k+4} \cdots X_r],$$

d. h., es sind alle $c_{3kk+3} = 0$, es gilt somit zunächst für $i = 1, 2, 3$, dass alle $c_{iki+k} = 0$. Gesetzt nun, wir hätten für alle $i \leqq m$ bewiesen, dass

$$(X_m X_k) = [X_{m+k+1} \cdots X_r];$$

dann bilden wir

$$(X_0 X_m X_k) \equiv (X_{m+1} X_k) + [X_{m+k+2} \cdots X_r] + (X_m X_{k+1}) \equiv 0,$$

und da nach Voraussetzung $(X_m X_{k+1}) = [X_{m+k+2} \cdots X_r]$, so ist auch

$$(X_{m+1} X_k) = [X_{m+k+2} \cdots X_r],$$

so gilt demnach allgemein die Formel

$$(X_i X_k) = [X_{i+k+1} \cdots X_r]. \tag{4}$$

Es sollen also für alle folgenden Bestimmungen die Formeln (1) und (4) zu Grunde gelegt werden:

$$\left\{\begin{array}{l} (X_0 X_k) = X_{k+1} \quad k = 1 \cdots r-1 \\ (X_i X_k) = [X_{i+k+1} \cdots X_r] \\ (X_i X_r) = 0 . \end{array}\right. \tag{5}$$

Unter den in § 10 dargestellten Typen von Zusammensetzungen 6-gliedriger Gruppen gehören zu *der* Klasse von Gruppen, die durch die Relationen (5) definiert sind, 3 Typen, die wir wie folgt zusammenfassen wollen:

$$(X_0 X_k) = X_{k+1}, \quad (X_1 X_2) = a X_4 + b X_5 \quad (X_1 X_3) = a X_5$$
$$(X_i X_4) = (X_2 X_3) = (X_i X_5) = 0;$$

wo

$$1.\ a = b = 1, \quad 2.\ a = 0, \quad b = 1, \quad 3.\ a = b = 0.$$

Die allgemeine Form der diesen 3 Typen entsprechenden Zusammensetzungen von 7-gliedrigen Gruppen, welche die Relationen (5) erfüllen, ist demnach, wenn wir berücksichtigen, dass die Jacobische Identität $(X_i X_k X_j) \equiv 0$ bestehen muss:

$$(X_0 X_k) = X_{k+1} \quad k = 1 \cdots 5 \quad (X_0 X_6) = 0$$
$$(X_1 X_2) = a X_4 + b X_5 + \alpha X_6 \quad (X_1 X_3) = a X_5 + b X_6$$
$$(X_1 X_4) = \gamma X_6 \quad (X_2 X_3) = (a - \gamma) X_6,$$

alle übrigen $(X_i X_k)$ sind Null.

Um α und γ, wenn möglich, näher zu bestimmen, setzen wir wieder

$$\delta X_0 = \sum_0^5 {}^i a_i X_i \quad \delta X_1 = \sum_1^5 {}^i b_i X_i,$$

dann sind alle anderen $\delta X_\varkappa = \delta(X_0 X_{k-1})$, also durch δX_0 und δX_1 vollständig bestimmt; berechnen wir darnach die Zuwüchse der Constanten α und γ, so ergiebt sich folgendes Schema:

	$(X_0 X_k)$	$(X_1 X_2)$	$(X_1 X_3)$	$(X_1 X_4)$	$(X_2 X_3)$	alle übrigen $(X_i X_k)$		
I. $(\gamma \neq 1)$	X_{k+1}	X_4	X_5	γX_6	$(1-\gamma) X_6$	0	$b_1 = 2a_0$ $a_1 = 0$	$\delta\alpha = -2a_0\alpha + 2b_3(\gamma-1)$ $\delta\gamma = 0$
II.	X_{k+1}	$X_4 + X_6$	X_5	X_6	0	0		
III.	X_{k+1}	X_4	X_5	X_6	0	0		
IV.	X_{k+1}	X_5	X_6	X_6	$-X_6$	0	$b_1 = 3a_0$	$\delta\alpha = -a_0\alpha + (2b_3 - a_1)\gamma$ $\delta\gamma = a_0\gamma$
V.	X_{k+1}	$X_5 + X_6$	X_6	0	0	0		
VI.	X_{k+1}	X_5	X_6	0	0	0		
VII.	X_{k+1}	0	0	X_6	$-X_6$	0	—	$\delta\alpha = (b_1 - 4a_0)\alpha + 2b_3\gamma$ $\delta\gamma = (b_1 - 2a_0)\gamma$
VIII.	X_{k+1}	X_6	0	0	0	0		
IX.	X_{k+1}	0	0	0	0	0		

§ 12.

8-gliedrige Gruppen vom Range Null.

Die Bestimmung der auf S. 74 aufgezählten Typen von Zusammensetzungen geschieht auf dieselbe Weise wie bei den 7-gliedrigen Gruppen; es wird daher genügen, dass wir einen Fall vollständig durchführen.

Die dem Typus I der G_7 entsprechenden Zusammensetzungen 8-gliedriger Gruppen haben die folgende allgemeine Form:

$$(X_0 X_k) = X_{k+1} \quad k = 1 \cdots 6 \quad (X_1 X_2) = X_4 + \alpha_1 X_7$$
$$(X_1 X_3) = X_5 + \beta_1 X_7 \quad (X_1 X_4) = \gamma X_6 + \gamma_1 X_7$$
$$(X_1 X_5) = \delta_1 X_7 \quad (X_2 X_3) = (1-\gamma) X_6 + \varepsilon_1 X_7$$
$$(X_2 X_4) = \eta X_7 \,, \quad \text{alle anderen} \quad (X_i X_k) = 0 \,.$$

Aus der Jacobischen Identität folgt nun zunächst

$$(X_0 X_1 X_2) \equiv \beta_1 X_7 \equiv 0 \,, \quad \text{also} \quad \beta_1 = 0$$
$$(X_0 X_1 X_3) \equiv \varepsilon_1 X_7 + \gamma_1 X_7 \equiv 0 \,; \; \varepsilon_1 = -\gamma_1$$
$$(X_0 X_1 X_4) \equiv (\eta - \gamma_1 + \delta_1) X_7 \equiv 0 \,; \; \delta_1 = \gamma - \eta$$
$$(X_0 X_2 X_3) \equiv (1 - \gamma - \eta) X_7 \equiv 0 \,; \; \eta = 1 - \gamma \,, \quad \text{also} \quad \delta_1 = 2\gamma - 1 \,.$$

Demnach nehmen die Relationen folgende Gestalt an:

$$(X_0 X_k) = X_{k+1} \,, \; k = 1 \cdots 6 \quad (X_1 X_2) = X_4 + \alpha_1' X_7 \quad (X_1 X_3) = X_5$$
$$(X_1 X_4) = \gamma X_6 + \gamma X_1 X_7 \quad (X_1 X_5) = (2\gamma - 1)_7 \quad (X_2 X_3) = (1-\gamma) X_6 - \gamma_1 X_7$$
$$(X_2 X_4) = (1-\gamma) X_7 \,.$$

Es ist nun zu untersuchen, ob sich die beiden noch unbestimmt gebliebenen Constanten α_1 und γ_1 noch spezialisieren lassen.

Zu diesem Zwecke setzen wir wieder

$$\delta X_0 = \sum_0^6 {}^i a_i X_i \quad \delta X_1 = \sum_1^6 {}^i b_i X_i \,,$$

		$(X_0 X_k)$ $k=1,\dots 6$	$(X_1 X_2)$	$(X_1 X_3)$	$(X_1 X_4)$	$(X_1 X_5)$	$(X_2 X_3)$	$(X_2 X_4)$	alle übrigen $(X_i X_k)$		
Nach 7. I.	I.	X_{k+1}	X_4	X_5	γX_6+X_7	$(2\gamma-1)X_7$	$(1-\gamma)X_6-X_7$	$(1-\gamma)X_7$	0	$b_1=2a_0$ $a_1=b_3=0$	$\delta\alpha_1=-3a_0\alpha_1+3(b_3-a_3)(\gamma-1)$ $\delta\gamma_1=-a_0\gamma_1$
$\gamma \neq 1$.	II.	X_{k+1}	X_4	X_5	γX_6	$(2\gamma-1)X_7$	$(1-\gamma)X_6$	$(1-\gamma)X_7$	0		
Nach 7. II.	III.	X_{k+1}	$X_4+X_6+\alpha_1 X_7$ wenn $\gamma_1=0$, dann $\alpha_1=0$.	X_5+X_7	$X_6+\gamma_1 X_7$	X_7	$-\gamma_1 X_7$	0	0	$a_0=b_1=a_1=0$	$\delta\alpha_1=2b_3\gamma_1$ $\delta\gamma_1=0$
	IV.	X_{k+1}	X_4	X_5	X_6+X_7	X_7	$-X_7$	0	0	$b_1=2a_0$ $a_1=0$	$\delta\alpha_1=-3a_0\alpha_1+2b_3\gamma_1$ $\delta\gamma_1=-a_0\gamma_1$
Nach 7. III.	V.	X_{k+1}	X_4+X_7	X_5	X_6	X_7	0	0	0		
	VI.	X_{k+1}	X_4	X_5	X_6	X_7	0	0	0		
Nach 7. IV.	VII.	X_{k+1}	X_5	X_6	X_6	$2X_7$	$-X_6+X_7$	$-X_7$	0	$a_0=b_1=0$ $a_1=2b_3$	$\delta\alpha_1=-3(a_1-b_3)$ $\delta\gamma_1=-3a_1$
Nach 7. V.	VIII.	X_{k+1}	X_5+X_6	X_6+X_7	$\gamma_1 X_7$	0	$(1-\gamma_1)X_7$	0	0	$a_0=b_1=0$	$\delta\alpha_1=(2b_3-a_1)\gamma_1-2(a_1+b_3)$ $\delta\gamma_1=0$
Nach 7. VI.	IX.	X_{k+1}	X_5	X_6	$\gamma_1 X_7$	0	$(1-\gamma_1)X_7$	0	0	$b_1=3a_0$	$\delta\alpha_1=-2a_0\alpha_1+(2b_3-a_1)\gamma_1-2(a_1+b_3)$ $\delta\gamma_1=0$
Nach 7. VII.	X.	X_{k+1}	0	0	X_6	$2X_7$	$-X_6$	$-X_7$	0	$b_1=2a_0$ $b_3=0$	$\delta\alpha_1=-3a_0\alpha_1+3b_1$ $\delta\gamma_1=a_0\gamma_1-3a_1$
	XI.	X_{k+1}	X_6	X_7	X_7	0	$-X_7$	0	0	$b_1=4a_0$	$\delta\alpha_1=-a_0\alpha_1+2b_3\gamma_1$ $\delta\gamma_1=a_0\gamma_1$
Nach 7. VIII.	XII.	X_{k+1}	X_6+X_7	X_7	0	0	0	0	0		
	XIII.	X_{k+1}	X_6	X_7	0	0	0	0	0		
	XIV.	X_{k+1}	0	0	X_7	0	$-X_7$	0	0	—	$\delta\alpha_1=(b_1-5a_0)\alpha_1+2b_3\gamma_1$ $\delta\gamma_1=(b_1-3a_0)\gamma_1$
Nach 7. IX.	XV.	X_{k+1}	X_7	0	0	0	0	0	0		
	XVI.	X_{k+1}	0	0	0	0	0	0	0		

dann ist

$$\delta X_2 = \delta(X_0 X_1) = (a_0 + b_1) X_2 + b_2 X_3 + (b_3 - a_2) X_4 + (b_4 - a_3) X_5 + (b_5 - a_4\gamma) X_6 + (b_6 - a_2\alpha_1 - a_4\gamma_1 - a_5(2\gamma - 1)) X_7$$

$$\delta X_3 = \delta(X_0 X) = (2a_0 + b_1) X_3 + (a_1 + b_2) X_4 + (b_3 - a_2) X_5 + (b_4 - a_3 - a_3(1-\gamma)) X_6 + (a_1\alpha_1 + a_3\gamma_1 - a_4 + b_5) X_7$$

$$\delta X_4 = \delta(X_0 X_3) = (3a_0 + b_1) X_4 + (2a_1 + b_2) X_5 + (b_3 - a_2\gamma) X_6 + (b_4 - 2a_3 + a_3\gamma - a_2\gamma_1) X_7$$

$$\delta X_5 = \delta(X_0 X_4) = (4a_0 + b_1) X_5 + (2a_1 + b_2 + a_1\gamma) X_6 + (b_3 - 2a_2\gamma + a_2 + a_1\gamma_1) X_7$$

$$\delta X_6 = \delta(X_0 X_5) = (5a_0 + b_1) X_6 + (3a_1\gamma - a_1 + b_2) X_7$$

$$\delta X_7 = \delta(X_0 X_6) = (6a_0 + b_1) X_7 .$$

Ferner wird

$$\delta(X_1 X_2) = (a_0 + 2b_1) X_4 + b_2 X_5 + (2b_3\gamma - b_3 - a_2\gamma) X_6 + (2b_3\gamma_1 - a_2\gamma_1 + (a_0 + 2b_1)\alpha_1 - 2b_4 + 3b_4\gamma - 2a_3\gamma + a_3) X_7;$$

andrerseits wird

$$\delta(X_1 X_2) = \delta X_4 + \alpha_1 \delta X_7 + X_7 \delta\alpha_1$$
$$= (3a_0 + b_1) X_4 + (2a_1 + b_2) X_5 + (b_3 - a_2\gamma) X_6 + (b_4 - 2a_3 + a_3\gamma - a_2\gamma_1 + (6a_0 + b_1)\alpha_1 + \delta\alpha_1) X_7 ,$$

wir erhalten also die Relationen

$$b_1 = 2a_0 \quad a_1 = 0 \quad 2b_3(\gamma - 1) = 0 ,$$

und da nach Voraussetzung $\gamma \neq 1$, so ist $b_3 = 0$; für $\delta\alpha_1$ erhalten wir

$$\delta\alpha_1 = -3a_0\alpha_1 + 3(b_4 - a_3)(\gamma - 1) .$$

Weiter finden wir, dass

$$\delta(X_1 X_4) = 7a_0\gamma X_6 + (7a_0\gamma_1 + b_2\gamma) X_7 ;$$

andrerseits ist

$$\delta(X_1 X_4) = \gamma\delta X_6 + \gamma_1 \delta X_7 + X_7 \delta\gamma_1$$
$$= 7a_0\gamma X_6 + (8a_0\gamma_1 + b_2\gamma) X_7 + X_7\delta\gamma_1 ,$$

so dass sich ergiebt:

$$\delta\gamma_1 = -a_0\gamma_1 .$$

Dass wir die Relationen zwischen den Parametern

$$b_1 = 2a_0 \quad a_1 = b_3 = 0$$

erhalten müssen, ist klar; die Werte von δX_0 und δX_1 müssen natürlich so gewählt werden, dass die Relationen der (mod. X_7) isomorphen G_7 $X_0 f \cdots X_6 f$ unverändert bleiben, und dazu ist eben nötig, dass $b_1 = 2a_0$, $a_1 = b_3 = 0$.

Aus den Werten der Zuwüchse von α_1 und γ_1 ergeben sich nun folgende Fälle:

Es ist $\gamma \neq 1$, mithin kann α_1 stets den Wert Null erhalten. Ist $\gamma_1 \neq 0$, so kann es immer $= 1$ gemacht werden, wir haben also zu unterscheiden:

$$1.\ \alpha_1 = 0 \quad \gamma_1 = 1\,. \quad 2.\ \alpha_1 = 0 \quad \gamma_1 = 0\,.$$

Analoge Rechnungen wiederholen sich nun in allen übrigen Fällen; die Tabelle auf Seite 74 giebt eine Übersicht der Resultate; die vorletzte Spalte enthält wieder die Bedingungen, welchen die Parameter a_i, b_i unterworfen sind, die letzte Spalte giebt die Werte der Zuwüchse der unbestimmten Constanten an, aus denen sich sofort die einzelnen Typen von Zusammensetzungen ergeben.

§ 13.

9-gliedrige Gruppen vom Range Null.

Die nachstehende Tabelle giebt die Resultate der Bestimmung aller Typen von Zusammensetzungen der G_9 an, die durch genau analoge Rechnungen wie oben aus den Typen der G_8 abgeleitet worden sind. Selbstverständlich liesse sich die Rechnung mit einem Schlage erledigen, indem man alle 8-gliedrigen Gruppen durch Anwendung von Constanten zunächst zu einem allgemeinen Typus zusammenfasst, darauf bei jedem $(X_i X_k)$ ein $c_{ik} X_8$ hinzufügt, nach der angegebenen Methode durch Variation von X_0 und X_1 die Zusammensetzung zu vereinfachen sucht und im Resultate erst wieder die anfänglich eingeführten Constanten gemäss den einzelnen Typen der G_8 spezialisiert; man umgeht damit den Übelstand, eine Anzahl ganz ähnlicher Rechnungen nacheinander ausführen zu müssen. Immerhin dürfte jedoch das letztere Verfahren für die praktische Bestimmung aller Typen vergleichsweise bequemer sein, weil man dabei allzu umfangreiche und wenig übersichtliche Formeln vermeidet.

Wie ersichtlich nimmt die Anzahl der wesentlich verschiednen Typen bei grösserer Parameterzahl der Gruppen sehr rasch zu, so dass wir für die G_9 trotz der in Formel 5 des § 11 ausgesprochnen wesentlichen Beschränkung bereits über 30 verschiedne Typen zählen. Dieser Umstand würde es wünschenswert erscheinen lassen, noch mehr allgemeine Gesichtspunkte zu gewinnen, welche den Nachteil, der in der successiven Bestimmung der Typen liegt, einigermassen aufheben könnten. Obwohl die nachstehende Übersicht einige bemerkenswerte Symmetrien in den Formeln hervortreten lässt, ist es uns doch bisher nicht gelungen, dieselben zur Auffindung solcher allgemeiner Gesichtspunkte zu verwerten.

Wir geben im Folgenden noch einige Erläuterungen zu der nachstehenden Tabelle.

In den Typen I und II bestehen zwischen den Constanten η_2, ν_2 und σ_2 die folgenden Relationen:

$$\nu_2 - \sigma_2 = (1-\gamma)\,\eta_2\,, \quad \nu_2 + \sigma_2 = 1 - \gamma\,, \quad \nu_2 + \eta_2 = 2\gamma - 1\,, \; \gamma \neq 1\,.$$

Hieraus bestimmen sich diese Constanten folgendermassen:

$$\eta_2 = \frac{5\gamma - 3}{3 - \gamma} \qquad \nu_2 = \frac{3\gamma(1-\gamma)}{3-\gamma} \qquad \sigma_2 = \frac{3(\gamma-1)^2}{3-\gamma}\,.$$

Der Wert $\gamma = 3$ ist ausgeschlossen; setzen wir nämlich diesen Wert in die obigen Gleichungen ein, so kommt

$$\nu_2 - \sigma_2 = -2\eta_2\,, \quad \nu_2 + \sigma_2 = -2\,, \quad \nu_2 + \eta_2 = 5\,,$$

und hieraus würde folgen

$$\nu_2 = -\eta_2 - 1\,; \quad -\eta_2 - 1 + \eta_2 = 5\,, \quad \text{also} \quad 6 = 0\,,$$

was absurd ist; mithin ist $\gamma \neq 3$.

Zu Typus III ist zu bemerken, dass, wenn $\gamma_1 \neq 0$, $\alpha_1 = 0$ (vergl. Tabelle in § 12) und $\alpha_2 = 0$ gemacht werden können; ebenso wird $\alpha_2 = 0$, wenn zwar $\gamma_1 = 0$, aber $\gamma_2 \neq 1$ ist.

Zu Typus V: $\alpha_2 = 0$, wenn $\gamma_2 \neq 0$.

In Typus VIII und IX können α_2 und γ_2 unter Umständen einfache Werte erhalten.

Ist in Typus VIII $\eta_2 \neq 0$ und $\gamma_1 \neq 0$, dann wird $\gamma_2 = 0$.

In IX sind folgende Fälle zu unterscheiden:

IX^a $\eta_2 \neq 0; = 1$ $\alpha_2 = 0$; ist auch $\gamma_1 \neq 0$, dann $\gamma_2 = 0$;
ist $\gamma_1 = 0$, dann γ_2 nicht zu spezialisieren.

IX^b $\eta_2 = 0$. dann 1. $\gamma_2 \neq 0; = 1$; $\alpha_2 = 0$.
2. $\gamma_2 = 0$. $\alpha_2 \neq 0$; dann $\alpha_2 = 0$, wenn $\gamma_1 \neq 1; = 1$, wenn $\gamma_1 = 1$.

Zu Typus XI: Wenn $\eta_2 \neq 0$, dann immer $\gamma_2 = 0$.

Zu Typus XII: 1. $\eta_2 \neq 0$, dann $\alpha_2 = \gamma_2 = 0$.
2. $\eta_2 = 0$; ist $\gamma_2 \neq 1$, dann immer $\alpha_2 = 0$.

		$(X_0 X_k)$ $k=1,\dots 7$	$(X_1 X_2)$	$(X_1 X_3)$	$(X_1 X_4)$	$(X_1 X_5)$	$(X_1 X_6)$	$(X_2 X_3)$
$\gamma \neq 1$: Nach 8. I.	I.	X_{k+1}	X_4	X_5	$\gamma X_6+X_7+\gamma_2 X_8$	$(2\gamma-1)X_6+2X_8$	$\eta_2 X_8$	$(1-\gamma)X_6-X_7-\gamma_2 X_8$
$\gamma \neq 1$: Nach 8. II.	II. a.	X_{k+1}	X_4	X_5	γX_6+X_8	$(2\gamma-1)X_7$	$\eta_2 X_8$	$(1-\gamma)X_6-X_8$
	II. b.	X_{k+1}	X_4	X_5	γX_6	$(2\gamma-1)X_7$	$\eta_2 X_8$	$(1-\gamma)X_6$
Nach 8. III.	III.	X_{k+1}	$X_4+X_6+\alpha_1 X_7+\alpha_2 X_8$	$X_5+X_7+\alpha_1 X_8$	$X_6+\gamma_1 X_7+\gamma_2 X_8$	$X_7+2\gamma_1 X_8$	X_8	$-\gamma_1 X_7+(1-\gamma_2)X_8$
Nach 8. IV.	IV.	X_{k+1}	X_4	X_5	$X_6+X_7+\gamma_2 X_8$	X_7+2X_8	X_8	$-X_7-\gamma_2 X_8$
Nach 8. V.	V.	X_{k+1}	$X_4+X_7+\alpha_2 X_8$	X_5+X_8	$X_6+\gamma_2 X_8$	X_7	X_8	$-\gamma_2 X_8$
Nach 8. VI.	VI. a.	X_{k+1}	X_4	X_5	X_6+X_8	X_7	X_8	$-X_8$
	VI. b.	X_{k+1}	X_4+X_8	X_5	X_6	X_7	X_8	0
	VI. c.	X_{k+1}	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	0
Nach 8. VII.	VII.	X_{k+1}	X_5	X_6	$X_6+\gamma_2 X_8$	$2X_7-X_8$	0	$-X_6+X_7+\gamma_2 X_8$
Nach 8. VIII.	VIII.	X_{k+1}	X_5+X_6	X_6+X_7	$\gamma_1 X_7+\gamma_2 X_8$	$(2\gamma_1-1)X_8$	$\eta_2 X_8$	$(1-\gamma_1)X_7+(1-\gamma_2)X_8$
Nach 8. IX.	IX. a.	X_{k+1}	X_5	X_6	$\gamma_1 X_7+\gamma_2 X_8$	$(2\gamma_1-1)X_8$	X_8	$(1-\gamma_1)X_7-\gamma_2 X_8$
	IX. b.	X_{k+1}	$X_5+\alpha_2 X_8$	X_6	$\gamma_1 X_7+\gamma_2 X_8$	$(2\gamma_1-1)X_8$	0	$1-\gamma_1)X_7-\gamma_2 X_8$
Nach 8. X.	X. a.	X_{k+1}	0	0	X_6+X_8	$2X_7$	0	$-X_6-X_8$
	X. b.	X_{k+1}	0	0	X_6	$2X_7$	0	$-X_6$
Nach 8. XI.	XI.	X_{k+1}	X_6	X_7	$X_7+\gamma_2 X_8$	$2X_8$	$\eta_2 X_8$	$-X_7+(1-\gamma_2)X_8$
Nach 8. XII.	XII.	X_{k+1}	$X_6+X_7+\alpha_2 X_8$	X_7+X_8	$\gamma_2 X_8$	0	$\eta_2 X_8$	$(1-\gamma)X_8$
Nach 8. XIII.	XIII. a.	X_{k+1}	X_6	X_7	0	0	X_8	X_8
	XIII. b.	X_{k+1}	X_6	X_7	$\gamma_2 X_8$ $\gamma_2 \neq 1$	0	0	$(1-\gamma_2)X_8$ $\gamma_2 \neq 1$
	XIII. c.	X_{k+1}	X_6+aX_8 $a=1$ oder $=0$	X_7	X_8	0	0	0
Nach 8. XIV.	XIV. a.	X_{k+1}	0	0	X_7	$2X_8$	X_8	$-X_7$
	XIV. b.	X_{k+1}	0	0	X_7+X_8	$2X_8$	0	$-X_7-X_8$
	XIV. c.	X_{k+1}	0	0	X_7	$2X_8$	0	$-X_7$
Nach 8. XV.	XV. a.	X_{k+1}	X_7	X_8	0	0	X_8	0
	XV. b.	X_{k+1}	X_7	X_8	X_8	0	0	$-X_8$
	XV. c.	X_{k+1}	X_7+X_8	X_8	0	0	0	0
	XV. d.	X_{k+1}	X_7	X_8	0	0	0	0
Nach 8. XVI.	XVI. a.	X_{k+1}	0	0	0	0	X_8	0
	XVI. b.	X_{k+1}	0	0	X_8	0	0	$-X_8$
	XVI. c.	X_{k+1}	X_8	0	0	0	0	0
	XVI. d.	X_{k+1}	0	0	0	0	0	0

$(X_2 X_4)$	$(X_2 X_5)$	$(X_3 X_4)$	alle übrigen $(X_i X_k)$		
$(1-\gamma)X_7$ $-X_8$	$\nu_2 X_8$	$\sigma_2 X_8$	0	$a_0=a_1=b_1=b_3=0$ $b_4=a_3$	$\delta\alpha_2=a_4(\sigma_2+1-\gamma\eta_2)+b_5(\eta_2-\nu_2-1)$ $\delta\gamma_2=0$.
$(1-\gamma)X_7$	$\nu_2 X_8$	$\sigma_2 X_8$	0	$a_1=b_3=0$ $b_1=2a_0$ $b_4=a_3$	$\delta\alpha_2=-4a_0\alpha_2+a_4(\sigma_2+1-\gamma\eta_2)+b_5(\eta_2-\nu_2)$ $\delta\gamma_2=-2a_0\gamma_2$
$(1-\gamma)X_7$	$\nu_2 X_8$	$\sigma_2 X_8$	0		
$-\gamma_1 X_8$	0	0	0	$a_0=a_1=b_1=0$ $b_3\gamma_1=0$	$\delta\alpha_2=3\gamma_1(b_4-a_3)+2b_3(\gamma_2-1)$ $\delta\gamma_2=0$
$-X_8$	0	0	0	$a_0=a_1=b_1=0$ $b_3=0$	$\delta\alpha_2=3(b_4-a_3)$ $\delta\gamma_2=0$
0	0	0	0	$a_0=a_1=b_1=0$	$\delta\alpha_2=2b_3\gamma_2$ $\delta\gamma_2=0$
0	0	0	0	$a_1=0$ $b_1=2a_0$	$\delta\alpha_2=-4a_0\alpha_2+2b_3\gamma_2$ $\delta\gamma_2=-2a_0\gamma_2$
0	0	0	0		
0	0	0	0		
$-X_7+X_8$	$2X_8$	$-3X_8$	0	$a_0=a_1=b_1=b_3=b_4=0$	$\delta\alpha_2=2(a_3-b_5)$ $\delta\gamma_2=0$
$(1-\gamma_1)X_8$	$-\eta_2 X_8$	$\eta_2 X_8$	0	$b_1=a_0=0$ $(2b_3-a_1)\gamma_1=2(b_3+a_1)$	$\delta\alpha_2=(2b_3-a_1)\gamma_2+2(b_5-a_3)\eta_2+3b_4(\gamma_1-1)-3a_1(\gamma_1+1)-2b_3$ $\delta\gamma_2=2(b_3-a_1)\gamma_1\eta_2$ $\delta\eta_2=0$
$(1-\gamma_1)X_8$	$-X_8$	X_8	0	$b_1=3a_0$ $(2b_3-a_1)\gamma_1=2(b_3+a_1)$	$\delta\alpha_2=-3a_0\alpha_2+(2b_3-a_1)\gamma_2+2(b_5-a_3)\eta_2+3b_4(\gamma_1-1)$ $\delta\gamma_2=-a_0\gamma_2+2(b_3-a_1)\gamma_1\eta_2$ $\delta\eta_2=a_0\eta_2$
$(1-\gamma_1)X_8$	0	0	0		
$-X_7$	$2X_8$	$-3X_8$	0	$b_1=2a_0$ $a_1=b_3=b_4=0$	$\delta\alpha_2=-4a_0\alpha_2-2b_5$ $\delta\gamma_2=-2a_0\gamma_2$
$-X_7$	$2X_8$	$-3X_8$	0		
$-X_8$	$-\eta_2 X_8$	$\eta_2 X_8$	0	$a_0=b_1=b_3=0$	$\delta\alpha_2=2b_5\eta_2+3(b_4-a_1)$ $\delta\gamma_2=-a_1\eta_2$ $\delta\eta_2=0$
0	$-\eta_2 X_8$	$\eta_2 X_8$	0	$a_0=b_1=0$	$\delta\alpha_2=2b_3(\gamma_2-1)+(2b_5-a_1)\eta_2$ $\delta\gamma_2=2b_3\eta_2$ $\delta\eta_2=0$
0	$-X_8$	X_8	0	$b_1=4a_0$	$\delta\alpha_2=-2a_0\alpha_2+2b_3(\gamma_2-1)+2b_5\eta_2$ $\delta\gamma_2=2b_3\eta_2$ $\delta\eta_2=2a_0\eta_2$
0	0	0	0		
0	0	0	0		
$-X_8$	$-X_8$	X_8	0	$b_1=3a_0$ $b_3=0$	$\delta\alpha_2=-3a_0\alpha_2+2b_5\eta_2+3b_4$ $\delta\gamma_2=-a_0\gamma_2-a_1\eta_2$ $\delta\eta_2=a_0\eta_2$
$-X_8$	0	0	0		
$-X_8$	0	0	0		
0	$-X_8$	X_8	0	$b_1=5a_0$	$\delta\alpha_2=-a_0\alpha_2+2b_3\gamma_2+(2b_5-a_1)\eta_2$ $\delta\gamma_2=a_0\gamma_2+2b_3\eta_2$ $\delta\eta_2=3a_0\eta_2$
0	0	0	0		
0	0	0	0		
0	0	0	0		
0	$-X_8$	X_8	0	—	$\delta\alpha_2=(b_1-6a_0)\alpha_2+2b_3\gamma_2+2b_5\eta_2$ $\delta\gamma_2=(b_1-4a_0)\gamma_2+2b_3\eta_2$ $\delta\eta_2=(b_1-2a_0)\eta_2$
0	0	0	0		
0	0	0	0		
0	0	0	0		

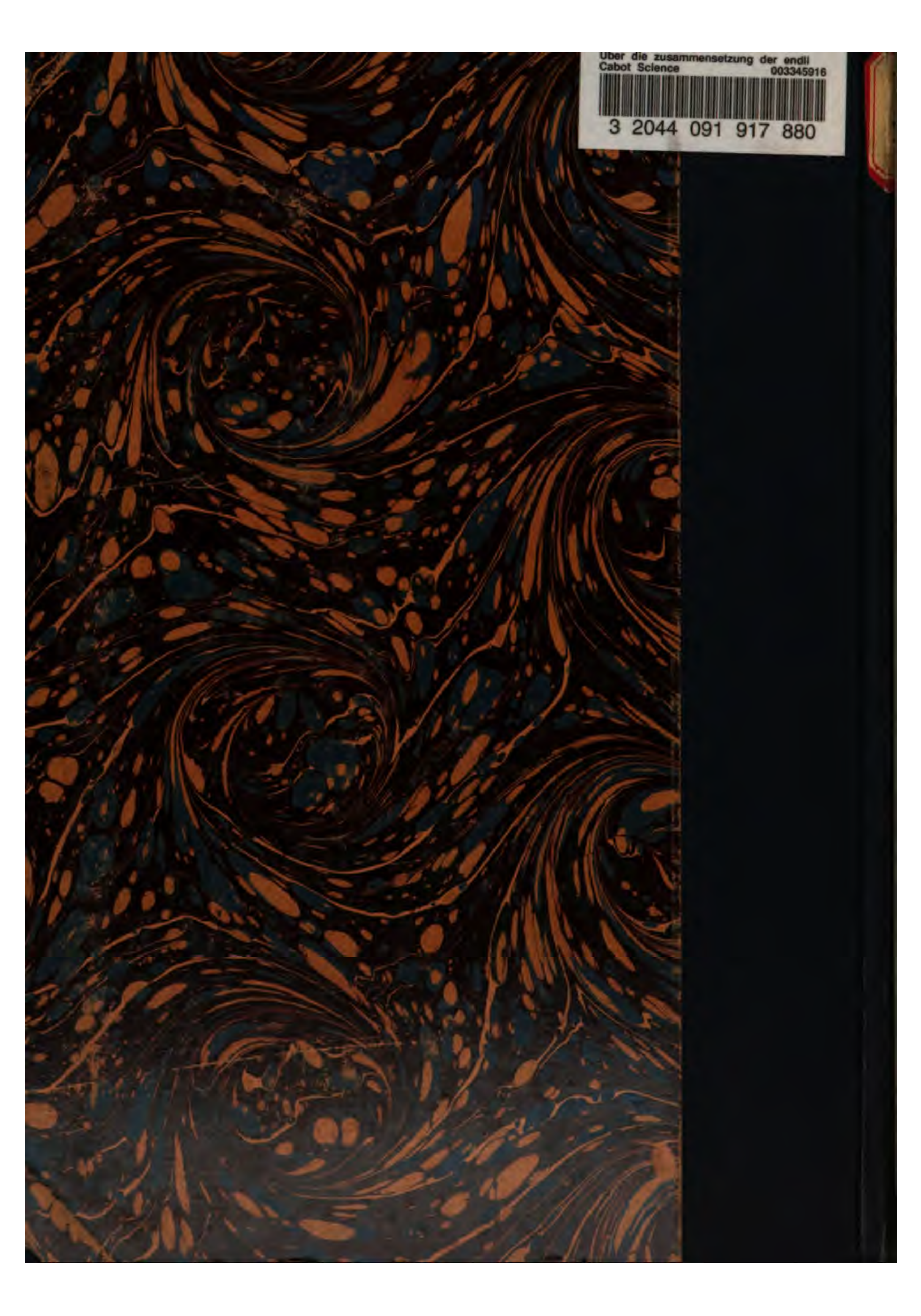
Lebenslauf.

Geboren am 11. Februar 1866 in Dresden, wo mein Vater Zimmerpolier ist, wurde ich evangelisch-lutherisch erzogen, besuchte bis zu meinem 11. Jahre die Volksschule, trat Ostern 1877 in die Sexta des Kgl. Gymnasiums zu Dresden-Neustadt ein und wurde Ostern 1886 mit dem Zeugnis der Reife entlassen. Nachdem ich meiner Militärpflicht als Einjährig-Freiwilliger beim Leibgrenadier-Regiment in Dresden genügt hatte, wandte ich mich Ostern 1887 nach Leipzig, um mich dem Studium der Mathematik und Naturwissenschaften zu widmen. Während meines Aufenthaltes in Leipzig hörte ich die Vorlesungen der Herren Professoren und Dozenten Bruns, Engel, Hofmann, König, Lie, Marshall, Masius, Mayer, Neumann, Pfeffer, Ratzel, Scholvin, Schur, Wiedemann, Wislicenus und Wundt und nahm teil an den Seminaren und Übungen der Herren Prof. Engel, Lie, Mayer, Ratzel, Schur und Wiedemann.

Allen meinen hochverehrten Lehrern, insbesondere aber den Herren Prof. Lie und Engel spreche ich für die mannigfache Förderung, die sie mir bei meinen Studien gewährten, meinen herzlichsten Dank aus.

Karl Umlauf.




Uber die zusammensetzung der endli
Cabot Science
003345916
3 2044 091 917 880